

Álgebra y Geometría Analítica
Universidad Nacional de San Luis

Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales
Departamento de Matemática

Patricia Galdeano, Jorge Oviedo y María Isabel Zakowicz

2015

Índice general

1. Prólogo	2
2. Números Complejos	1
2.1. Introducción	1
2.2. Forma binómica o canónica	1
2.3. Forma polar o trigonométrica de un número complejo	5
2.4. Forma exponencial de un número complejo	8
2.5. Raíces de un números complejos	9
2.6. Ejercicios	12
3. Lógica	17
3.1. Introducción	17
3.2. Proposiciones	17
3.2.1. Proposiciones Compuestas y Conectivos Lógicos	18
3.3. Operaciones con proposiciones	19
3.3.1. Negación	19
3.3.2. Conjunción	19
3.3.3. Disyunción y Diferencia Simétrica	20
3.3.4. Condicional	20
3.3.5. Bicondicional	23
3.4. Leyes Lógicas o Tautologías	24
3.5. Funciones Proposicionales. Cuantificación.	25
3.6. Circuitos lógicos	27
3.7. Ejercicios	28
4. Razonamiento Deductivo y Métodos de demostración	33
4.1. Razonamiento Deductivo	33
4.2. Métodos de demostración	35
4.2.1. Forma directa	35
4.2.2. Demostración por contrarrecíproco	36
4.2.3. Demostraciones por reducción al absurdo	36
4.3. Inducción Matemática	37
4.3.1. Principio de Inducción Matemática	38
4.4. Ejercicios	43
5. Conjuntos	47
5.1. Introducción	47
5.2. Notaciones y Definiciones	47

5.3.	Diagrama de Venn	50
5.4.	Conjuntos y Subconjuntos	51
5.5.	Operaciones entre conjuntos	53
5.5.1.	Complemento de un conjunto	53
5.5.2.	Unión, Intersección, Diferencia y Diferencia Simétrica	53
5.5.3.	Conjunto de Partes. Binomio de Newton	58
5.5.4.	Producto Cartesiano	60
5.6.	Ejercicios	61
6.	Vectores	65
6.1.	Introducción	65
6.2.	Enfoque geométrico	65
6.2.1.	Definiciones y Notación	65
6.2.2.	Operaciones con vectores	66
6.3.	Enfoque Algebraico	67
6.4.	Ángulo entre dos vectores	69
6.4.1.	Vectores en \mathbb{R}^2 en términos de su módulo, dirección y sentido	70
6.5.	Producto escalar (o interno)	72
6.5.1.	Proyección de un vector sobre otro	74
6.6.	Producto vectorial de vectores en \mathbb{R}^3	75
6.6.1.	Propiedades	76
6.7.	Ejercicios	77
7.	Geometría Analítica	82
7.1.	Introducción	82
7.2.	Ecuaciones de la recta	82
7.2.1.	Ecuación vectorial y paramétrica	83
7.3.	Posiciones relativas de rectas	84
7.3.1.	Ángulo entre rectas	86
7.4.	Ecuaciones del plano	87
7.4.1.	Ecuación vectorial y representación paramétrica	87
7.4.2.	Ecuación Implícita	88
7.5.	Posiciones relativas de Planos	89
7.6.	Representación gráfica de rectas y planos	90
7.6.1.	Representación gráfica de rectas en \mathbb{R}^3	90
7.6.2.	Representación gráfica de Planos	92
7.7.	Ejercicios	93
8.	Sistemas de ecuaciones lineales	98
8.1.	Introducción	98
8.2.	Sistemas de Ecuaciones	98
8.2.1.	Sistemas de ecuaciones lineales	100
8.2.2.	Método de Gauss	102
8.2.3.	Aplicaciones	107
8.3.	Ejercicios	112
	Bibliografía	118

Capítulo 1

Prólogo

La enseñanza de los contenidos fundamentales del álgebra y de la geometría actual, y el uso de sus particulares terminologías son una realidad en todo curso básico a nivel universitario. Creemos que hay dos razones principales que dan crédito a esto: una asociada al progreso de las ciencias y a la unidad conceptual; la otra vinculada estrechamente a sus aplicaciones en casi todas las disciplinas de interés práctico y de vigencia cotidiana.

Como profesores pretendemos dar las bases para que los estudiantes tengan éxito en cursos superiores. Además tenemos como objetivo desarrollar distintas capacidades básicas en Álgebra, para que los alumnos logren realizar razonamientos deductivos y demostraciones formales. También damos algunos conceptos básicos de Geometría en el plano y en el espacio; se espera que los alumnos logren una interpretación geométrica de las distintas ecuaciones, sistemas de ecuaciones y sus respectivas soluciones. Por otra parte en algunos temas se seleccionan ejercicios en base a las aplicaciones, a fin de despertar el interés de los alumnos.

El material se organiza del siguiente modo: en el capítulo 1, comenzamos con los números complejos, a pesar de ser parte de la trigonometría, el álgebra y la geometría, es muy poco estudiado en la escuela básica, por este motivo, abordamos el tema dando los conceptos básicos. Definimos los números complejos en forma binómica, en forma trigonométrica y enunciamos sus propiedades.

En los capítulos 2 y 3 se introducen las nociones básicas de lógica, operaciones entre proposiciones y relaciones entre ellas. Siendo estas herramientas las bases para lograr el enunciado y aplicación de métodos de demostración.

El propósito del capítulo 4 es el estudio de la teoría intuitiva de conjuntos. Se definen la inclusión y la igualdad, como también las operaciones entre ellos pretendiendo mostrar un método adecuado de trabajo para demostrar distintas propiedades.

En los capítulos 5 y 6 haciendo una introducción al concepto de vectores y sus operaciones, estos son utilizados para la obtención de una representación vectorial tanto de rectas como de planos.

En el capítulo final se introduce el método de Gauss, uno de los más usados para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Se pone de manifiesto una clara conexión entre el estudio geométrico de rectas y planos con los sistemas de ecuaciones lineales.

Capítulo 2

Números Complejos

2.1. Introducción

La ecuación tan sencilla como $x^2 + 1 = 0$ carece de solución en el conjunto de los números reales, ya que el cuadrado de un número real es positivo o nulo y por lo tanto $x^2 \neq -1$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

Babilonios, Griegos y Árabes consideraban imposible resolver éste problema. El primer indicio de solución surgió con Girolamo Cardano (1501-1576) y Tartaglia (1499-1557). A partir de entonces, los matemáticos trabajaron con números cuya existencia aun no estaba confirmada. El término número complejo fue introducido por el gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que abrió el camino para el uso general y sistemático de los números complejos, denotados por \mathbb{C} . Actualmente son muy utilizados en las aplicaciones prácticas como en las corrientes eléctricas y en la física subatómica.

2.2. Forma binómica o canónica

Para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ introducimos la unidad imaginaria, denotada por i , con la siguiente propiedad

$$i^2 = -1,$$

como su cuadrado es negativo, la letra i no representa un número real.

Definición 2.1 Definimos la forma binómica o canónica del número complejo z como

$$z = a + b i, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } i^2 = -1.$$

donde a se denomina la parte real y b la parte imaginaria del número complejo.

Notemos que el conjunto de los números complejos contiene al conjunto de los números reales, esto es, cualquier número real x se puede escribir como un número complejo de la forma $z = x + 0 i$.

La igualdad, suma, resta y multiplicación de números complejos, están definidas de modo que se conservan las reglas del álgebra de números reales.

Definición 2.2 Dos números complejos $z = a + b i$ y $w = c + d i$ son iguales cuando sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales, es decir,

$$z = w \text{ cuando } a = c \text{ y } b = d.$$

Producto por un real k

Definición 2.3 Dado un número complejo $a + b i$ y un número real k entonces

$$k(a + b i) = ka + (kb) i.$$

Ejemplo 2.1 Para $z = 2 - 3 i$

$$1. (-2)z = (-2)2 + ((-2)(-3)) i = -4 + 6 i.$$

$$2. \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(2 - 3 i) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}(-3) i = 1 - \frac{3}{2} i. \quad \square$$

Suma y Resta

Definición 2.4 Si $z = a + b i$ y $w = c + d i$ son dos números complejos entonces

$$z + w = (a + b i) + (c + d i) = (a + c) + (b + d) i$$

$$z - w = (a + b i) - (c + d i) = (a - c) + (b - d) i$$

Ejemplo 2.2 1. $(2 - 3i) + (-1 + 4i) = (2 - 1) + (-3 + 4)i = 1 + 1i = 1 + i.$

$$2. (2 - 3i) - (-1 + 4i) = (2 - (-1)) + (-3 - 4)i = (2 + 1) + (-7)i = 3 - 7i. \quad \square$$

Observemos que la resta de dos números complejos también se puede definir, al igual que en los números reales, como $z - w = z + (-1)w$ donde a $(-1)w$ se lo denomina el opuesto de w .

Multiplicación o producto

Definición 2.5 Si $z = a + b i$ y $w = c + d i$ son dos números complejos entonces el producto es:

$$z w = (a + b i) (c + d i) = (ac - bd) + (ad + bc) i.$$

Ejemplo 2.3

$$\begin{aligned} (2 - 3i) (-1 + 4i) &= (2(-1) - (-3)4) + ((2)4 + (-3)(-1))i \\ &= (-2 - (-12)) + (8 + 3)i = (-2 + 12) + (11)i = 10 + 11i. \end{aligned}$$

□

Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma y la multiplicación, se cumplen también en los números complejos. Sin embargo, la existencia del inverso multiplicativo de un número distinto de cero requiere un análisis más cuidadoso, se deben hacer algunas consideraciones previas.

Conjugado de un número complejo

Definición 2.6 Dado un número complejo $z = a + b i$, su conjugado es $\bar{z} = a - b i$.

Ejemplo 2.4 1. $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i = 2 - 3i$

$$2. \overline{-2 - 4i} = -2 + 4i$$

$$3. \overline{2} = \overline{2 + 0i} = 2 \quad \square$$

Propiedades del conjugado de un número complejo:

1. El conjugado de un número real es él mismo.
2. El conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número.

$$\overline{\overline{z}} = z$$

3. El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

4. El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados.

$$\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$$

5. El producto de un número complejo por su conjugado es un número real no negativo. Es decir, si $z = a + bi$, entonces $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Demostración de 5. Si $z = a + bi$ tenemos que $\overline{z} = a - bi$ por lo tanto

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = (aa + bb) + (ab - ba)i = a^2 + b^2.$$

■

Este nuevo concepto de conjugado de un número z nos permite obtener la forma binómica del inverso multiplicativo, z^{-1} , de un número z distinto de cero multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado de z . Así para $z = a + bi$

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \frac{(a - bi)}{(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Ejemplo 2.5 Para $z = 2 - 3i$,

$$z^{-1} = \frac{2}{2^2 + (-3)^2} - \frac{(-3)i}{2^2 + (-3)^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

□

Cociente:

Definición 2.7 El cociente de dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, donde $w \neq 0$, es

$$\frac{z}{w} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i.$$

Ejemplo 2.6 Resolver los siguientes cocientes de números complejos:

$$1. \frac{3 - 2i}{-1 + 4i} = \frac{3(-1) + (-2)4 + ((-2)(-1) - 3 \cdot 4)i}{(-1)^2 + 4^2} = \frac{(-3 - 8) + (2 - 12)i}{1 + 16} = -\frac{11}{17} - \frac{10}{17}i.$$

$$2. \frac{4 + i}{2 - 3i} = (4 + i)(2 - 3i)^{-1} = (4 + i)\left(\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i\right) = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \frac{3-i}{-1+4i} &= \frac{(3-i)(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{(3(-1) - (-1)(-4)) + (3(-4) + (-1)(-1))i}{(-1)^2 + 4^2} \\
 &= \frac{(-3-4) + (-12+1)i}{1+16} = -\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i.
 \end{aligned}$$

□

La siguiente tabla proporciona un resumen de algunas definiciones que usaremos, donde $z = a + bi$ y $w = c + di$

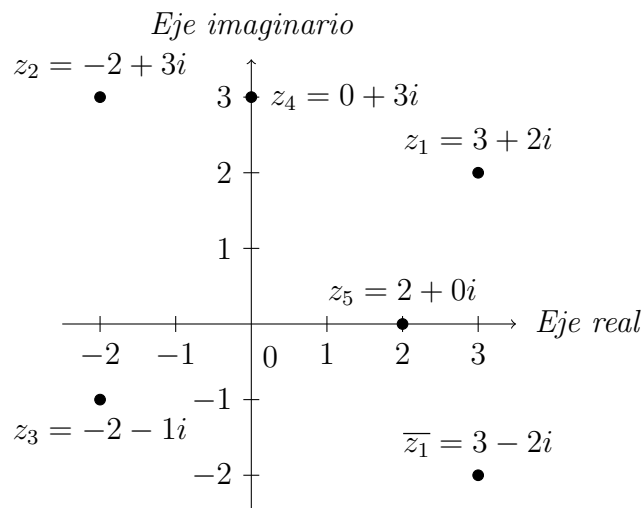
Terminología	Definición
Número complejo	$a + bi$ donde a y b son reales e $i^2 = -1$
Nro. imaginario puro	$a + bi$ cuando $a = 0$
Igualdad, $z = w$	$a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$
Suma, $z + w$	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Producto, $z.w$	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Producto por un real k , $k.z$	$k(a + bi) = ka + (kb)i$
Resta, $z - w$	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Conjugado de z , \bar{z}	$\overline{a + bi} = a - bi$
Inverso de z , $z^{-1} = \frac{1}{z}$	$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$
Cociente, $z.w^{-1} = \frac{z}{w}$	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$

Así como los números reales se pueden representar geoméricamente en la recta, los números complejos se pueden representar en el plano¹.

Sea $z = a + bi$, lo representamos como el punto (a, b) del plano coordenado o plano complejo, el eje horizontal se lo denomina eje real y al vertical eje imaginario.

¹Fue John Wallis (1673) el primero en sugerir la representación gráfica de un número complejo, la cual no fue usada hasta 1800 por Karl F. Gauss.

Ejemplo 2.7 Representar en el plano los siguiente números complejos:



Recordemos que el valor absoluto o módulo de un número real a , que se denota por $|a|$, es la distancia del punto a al origen. En forma similar podemos decir que el módulo de un número complejo $z = a + bi$, es la distancia del punto (a, b) al origen $(0, 0)$ del plano coordenado.

Definición 2.8 El módulo de $z = a + bi$, es $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo 2.8 1. Para $z_1 = 3 + 2i$, $|z_1| = |3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$,

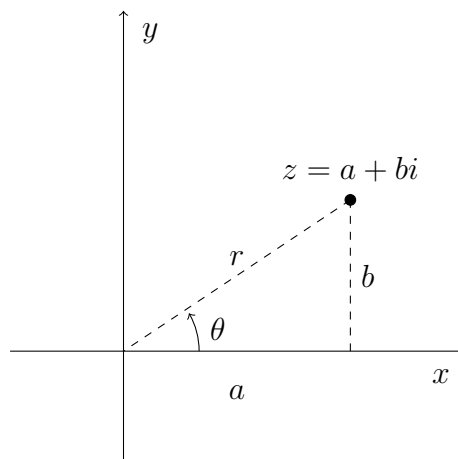
$$y \ |z_1| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}, \text{ (note que } |z_1| = |\bar{z}_1| \text{.)}$$

$$2. \ |3i| = |0 + 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$3. \ |-2| = |-2 + 0i| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ (note que ésta forma de calcular el módulo coincide con el cálculo del valor absoluto como número real.)} \quad \square$$

2.3. Forma polar o trigonométrica de un número complejo

Consideremos el número complejo $z = a + bi$, con a y b distintos de cero. Sea θ el ángulo medido en sentido contrario al de giro de las agujas de un reloj, entre el eje horizontal x y el segmento que une el punto (a, b) con el origen.



Observamos que utilizando las relaciones trigonométricas obtenemos:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{r} \end{cases} \quad \text{con } r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

por lo tanto $a = r \cos \theta$ y $b = r \operatorname{sen} \theta$.

Con esto se define la forma polar o trigonométrica de un número z .

Definición 2.9 La forma polar o trigonométrica de un número complejo $z = a + bi$ es

$$z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

donde r es el módulo y $0 \leq \theta < 2\pi$ es el argumento de z .

Dado que $\cos \alpha = \cos (\alpha + 2k\pi)$ y $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$, un mismo número complejo tendría infinitas representaciones, por esta razón se restringe el argumento θ a $0 \leq \theta < 2\pi$.

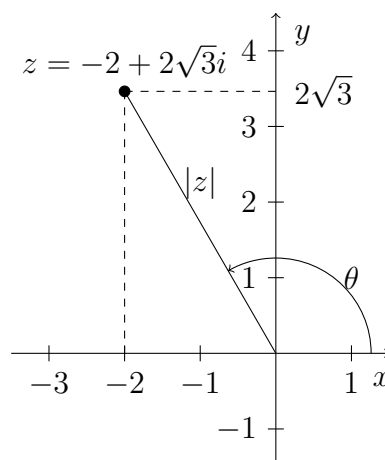
El argumento de un número complejo distinto de cero $z = a + bi$, se puede calcular teniendo en cuenta a que cuadrante pertenece el número complejo del siguiente modo:

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{si } a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2\pi & \text{si } a > 0 \text{ y } b < 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi & \text{si } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ o } 90^\circ & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} \text{ o } 270^\circ & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.9 Calcular la forma polar o trigonométrica de

$$z = a + bi = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

Comenzamos por hacer la representación gráfica.



Solución.

Calculemos el módulo y el argumento del número. Así, tenemos que el módulo es

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

Para calcular θ , tenemos que

$$\operatorname{tg} \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

como $z \in 2^\circ$ cuadrante por (2.1) $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Por lo tanto la forma polar de z es

$$z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right).$$

□

Producto y cociente en forma polar

Cuando los números complejos se expresan en forma polar, la multiplicación y la división se puede efectuar según lo indica el siguiente teorema:

Teorema 2.1 Sean $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ entonces

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2))$.

b) Si $z_2 \neq 0$, entonces $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2))$.

Demostración. Para realizar la demostración se usan las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos (\theta_1 \pm \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \\ \operatorname{sen} (\theta_1 \pm \theta_2) &= \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \pm \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

los detalles quedan como ejercicio.

Ejemplo 2.10 Sea $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$ y $z_2 = 3(\cos \frac{11\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{4})$, calcular en forma polar $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$.

Solución.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \cdot 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{4} \right) \right) = 6(\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi) \\ &= 6(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{11\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{11\pi}{4} \right) \right) = \frac{2}{3} \left(\cos \left(-\frac{10\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{10\pi}{4} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} (\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi) = \frac{2}{3} (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi). \end{aligned}$$

□

Potencias de números complejos en forma polar

Usando la forma polar de un número complejo tenemos que:

$$\begin{aligned} z &= r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ z^2 &= r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) \\ z^3 &= r^3 (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) \\ &\vdots \\ z^n &= r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \end{aligned}$$

La última igualdad se lo conoce como Teorema de De Moivre.

Teorema 2.2 (De Moivre) Si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y n un entero entonces

$$z^n = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

En la demostración de este teorema se usa el método de Inducción Matemática que veremos en capítulo de lógica, por lo que la dejamos para más adelante.

Ejemplo 2.11 Calcular $(-1 + \sqrt{3}i)^{12}$.

Solución.

Primero escribimos el número complejo en forma polar y obtenemos que $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$.

Luego calculamos

$$z^{12} = 2^{12} \left(\cos 12 \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} 12 \frac{2\pi}{3} \right) = 4096 (\cos 8\pi + i \operatorname{sen} 8\pi) = 4096.$$

□

Las potencias de i siguen un patrón que es útil conocer

$$\begin{array}{ll} i^1 = i & i^5 = i^4 i = 1 i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^4 i^2 = 1 (-1) = -1 \\ i^3 = i^2 i = -i & i^7 = i^4 i^3 = 1 (-i) = -i \\ i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1 & i^8 = i^4 i^4 = 1, \end{array}$$

y así sucesivamente. Por tanto, como las potencias de i se repiten cada cuarta potencia, utilizando el Teorema del resto se puede calcular cualquier potencia n de i dividiendo n por 4, esto es:

$$i^n = i^{4c+r} = (i^4)^c i^r = 1 i^r = i^r.$$

Ejemplo 2.12 1.

2. $i^{25} = i^{24} i = (i^4)^6 (i) = 1 i = i$

3. $i^{103} = i^{100} i^3 = (i^4)^{25} (-i) = 1 (-i) = -i.$

2.4. Forma exponencial de un número complejo

Una variante de la forma polar o trigonométrica se obtiene usando la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Esto nos permite escribir un número complejo de la siguiente forma, denominada forma exponencial:

$$z = |z| e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Esta forma es especialmente cómoda para expresar productos y cocientes ya que sólo hay que tener en cuenta las propiedades de las funciones exponenciales.

Observación:

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$

2. Si $z_2 \neq 0$, entonces $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

En particular si $z_1 = 1$, tenemos que el inverso de z_2 es:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{r_2} e^{i(2\pi - \theta_2)} = r_2^{-1} e^{i(2\pi - \theta_2)}.$$

3. Para potencias con exponentes enteros tenemos $z^n = |z|^n e^{in\theta}$.

Ejemplo 2.13 Sean $z_1 = 2e^{i\pi}$ y $z_2 = 3e^{i\pi/3}$, calcular

1. $z_1 z_2 = 2e^{i\pi} 3e^{i\pi/3} = 6e^{i4\pi/3}$.

2. $z_2^{-1} = 2^{-1} e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} e^{i5\pi/3}$.

2.5. Raíces de un números complejos

Definición 2.10 Un número complejo w es una raíz n -ésima del número complejo z si

$$z = w^n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

Es decir, $w = \sqrt[n]{z}$ si solo si $z = w^n$.

Dado $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, y sea $w = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ una de las raíces n -ésimas de z , entonces por la ecuación (2.2) y por el Teorema de De Moivre tenemos:

$$\begin{aligned} r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) &= (s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta))^n \\ &= s^n (\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{cases} s^n = r \\ n\beta = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Así tenemos, para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$$

Observemos que si sustituimos $k = 0, 1, \dots, n - 1$, en la igualdad anterior, obtenemos n valores distintos de w que se denominan raíces n -ésimas de z . Ningún otro valor de k , producirá una nueva raíz.

El análisis anterior nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.3 (Raíces n -ésimas de un número complejo) Sea $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ un número complejo. Si $z \neq 0$, existen n raíces n -ésimas distintas, dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$$

donde $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Todas las raíces n - ésimas de z tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$, de aquí que, al observar su representación geométrica, éstas se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en 0 e igualmente espaciadas ya que la diferencia en los argumentos de las raíces sucesivas es de $\frac{2\pi}{n}$. Es decir, las raíces n - ésimas de z , son los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ y con ángulo central $\frac{2\pi}{n}$.

Ejemplo 2.14 Hallar las raíces terceras de $z = -1 + \sqrt{3}i$ y representarlas gráficamente.

Solución.

Primero representamos a $z = -1 + \sqrt{3}i$ en forma polar.

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi \right).$$

En este caso $n = 3$, por lo tanto tenemos

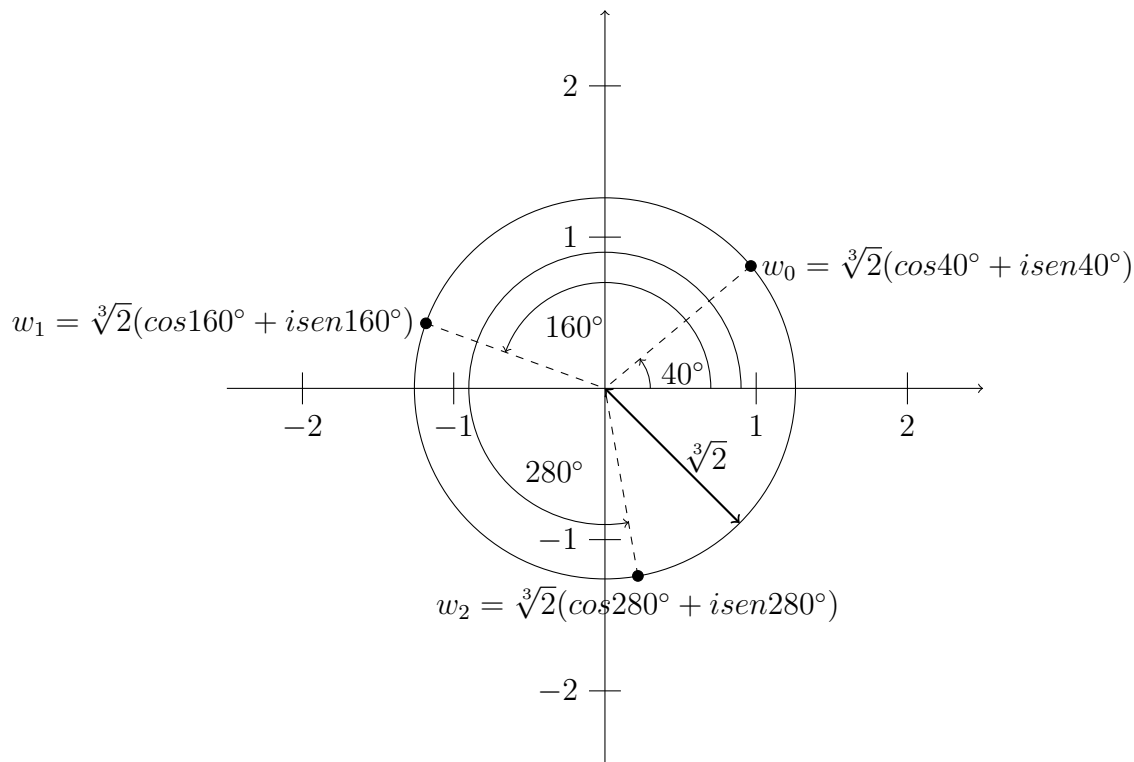
$$w_k = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi k}{3} \right) \right)$$

donde $k = 0, 1, 2$. Es decir,

$$w_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi \cdot 0}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi \cdot 0}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2}{9}\pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{9}\pi \right)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi \cdot 1}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi \cdot 1}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{8}{9}\pi + i \operatorname{sen} \frac{8}{9}\pi \right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi \cdot 2}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi \cdot 2}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{14}{9}\pi + i \operatorname{sen} \frac{14}{9}\pi \right)$$



□

Ejemplo 2.15 Resolver la ecuación $z^4 - 1 = 0$.

Solución.

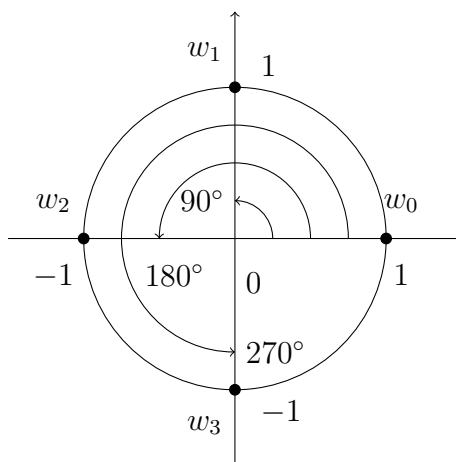
Si $z^4 - 1 = 0$ entonces $z^4 = 1$, vemos que las soluciones de esta ecuación son las cuatro raíces cuartas del número complejo 1.

Escribiendo 1, en forma polar, tenemos que $z = 1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ y $n = 4$, por lo tanto

$$w_k = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{4} + i \operatorname{sen} \frac{0 + 2\pi k}{4} \right) = 1 \left(\cos \frac{2\pi k}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{4} \right)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3$. Es decir, las cuatro soluciones de la ecuación son

$$\begin{aligned} w_0 &= 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) &&= 1 + 0i = 1 \\ w_1 &= 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) &&= 0 + 1i \\ w_2 &= 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) &&= -1 - 0i \\ w_3 &= 1\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi\right) &&= 0 - 1i. \end{aligned}$$



□

Ahora podemos resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ dada al comienzo de la unidad.

Dado que $x^2 + 1 = 0$ es equivalente a $x^2 = -1$ y como $-1 = 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ las raíces cuadradas de -1 son

$$w_k = \sqrt[2]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2\pi k}{2} \right) = 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \right)$$

donde $k = 0, 1$. Es decir, que las dos soluciones de la ecuación son

$$\begin{aligned} w_0 &= 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) &&= 0 + 1i = i \\ w_1 &= 1\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi\right) &&= 0 - 1i = -i \end{aligned}$$

Otra aplicación del Teorema 3 (raíz n -ésima de complejo) es que se puede resolver cualquier ecuaciones del tipo $x^n + p = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.1 Resolver la ecuación de segundo grado

$$3x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Solución.

Usando la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado tenemos que

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 60}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{6}.$$

Por Teorema 2.3 las raíces cuadradas del número complejo $z = -44$ son:

$$z_1 = \sqrt{44} i \text{ y } z_2 = -\sqrt{44} i.$$

Luego

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4 + \sqrt{-44}}{6} = -\frac{4}{6} + \frac{\sqrt{44} i}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{11} i \\ x_2 &= \frac{-4 - \sqrt{-44}}{6} = -\frac{4}{6} - \frac{\sqrt{44} i}{6} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{11} i. \end{aligned}$$

□

A diferencia de los números reales, con los números complejos se pueden resolver cualquier ecuación polinómica. En particular, los números complejos resuelven *cualquier* ecuación de segundo grado mientras que con los números reales solo se resuelven, aquellas en la que el discriminante es no negativo.

2.6. Ejercicios

1. Efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado en forma binómica.

$$a) (2 - 3i) + (6 + 8i) \quad b) (-3 + 2i) - (4 - 4i) \quad c) (8 + 4i) - (2 - 2i)$$

$$d) 3(2 - 6i) \quad e) 2i(2 - 3i) \quad f) (3 - 4i)(2 + i)$$

$$g) (-6 + i)(-6 - i) \quad h) (-3 + i)(3 + i) \quad i) \frac{10}{3-4i}$$

$$j) \frac{2+i}{i} \quad k) \frac{2-i}{-2i} \quad l) \frac{6-i}{1+i}$$

$$m) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \quad n) (1 + i)^2 \quad o) 4 + i^3$$

$$p) 6i^3 - 4i^5$$

2. Hallar los números reales a y b tales que:

$$a) a + bi = 2 + 3i$$

$$b) a + bi = (2 + 3i) - (2 - 3i)$$

$$c) a + bi = (1 + i)^2$$

$$d) a + bi = \frac{1}{3 - 4i}$$

$$e) 2a + bi = (1 + 2i)^2.$$

3. Representar gráficamente los números complejos; $3 + 4i$, $3i$, $-2 + 3i$, $-2 - 2i$, $3 - 4i$ y 3 .

4. Representar gráficamente el opuesto y el conjugado de los siguientes números: $3 + 4i$, $3i$ y 3 .

5. Si $z = 3 + 2i$, graficar z , $-z$, \bar{z} y $\overline{-z}$. ¿Qué relación geométrica existe entre ellos?

- a) Probar las propiedades 1 a 4 del conjugado de un número complejo.
 b) Para cualquier número complejo u y v , verificar que \overline{uv} y $u\overline{v}$ son conjugados.
6. Determinar el valor de x , para que $z = (-3 - 2i)(3 + xi)$ sea:
- a) Un número real
 b) Un número imaginario puro
 c) $|z| = 8\sqrt{2}$.

7. La admitancia, Y , de un circuito eléctrico está dado por

$$Y = \frac{1}{Z}$$

donde Z es la impedancia. Si $Z = 100 - 25i$ encontrar Y .

8. La impedancia total, Z , de un circuito que contiene un inductor con inductancia L y resistor con resistencia R en serie está dado por:

$$Z = R + 2\pi fLi$$

donde f es la frecuencia. Si $Z = (50 + 200i)\Omega$ y $f = 50$ Hz, encontrar R y L .

9. Dados los siguientes números complejos:

a) $1 + i$ b) 3 c) $3i$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e) $-1 - i$ f) -25

g) $(-3 + \sqrt{2}i)$ h) $(-2i)$ i) $(-2 - 4i)$

Representarlos gráficamente, expresarlos en forma exponencial y trigonométrica.

10. Expresar en forma canónica $a + bi$, donde a y b son números reales, los siguientes números complejos:

a) $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ b) $2e^{i\pi}$ c) $e^{i\frac{7}{4}\pi}$

11. Usar la forma trigonométrica para calcular $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$. Expresar el resultado en forma canónica (o binómica) y en forma trigonométrica (o polar).

a) $z_1 = -1 + i$ $z_2 = 1 + i$ b) $z_1 = -3i$ $z_2 = 2i$

c) $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i$ $z_2 = 4i$

12. Si $u = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $v = 2 - i\sqrt{3}$. Usar la forma exponencial para calcular uv y $\frac{u}{v}$.

13. Calcular las siguiente potencias y expresar el resultado en forma binómica.

a) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^{12}$ b) $(-1 + i)^{28}$

c) $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^{32}$ d) $(1 - \sqrt{3}i)^5$

e) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]^{20}$ f) i^{49}

14. Dados los complejos $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = i$, $z_3 = 3e^{i\frac{7}{4}\pi}$, $z_4 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, $z_5 = -3 - 3i$, resolver en forma trigonométrica (polar):

a) z_5^4 b) $(z_1 z_2)^2 + z_2^3$ c) $\frac{z_1 + \bar{z}_2}{z_3 + z_4}$

15. Representar gráficamente el conjunto de números complejos z tales que:

a) $z = a + bi$ con $b > 0$

b) $z = a + bi$ con $a \leq 0$ y $b \geq 0$

c) $|z| = 1$

d) $|z| < 1$

e) $1 < |z| \leq 2$

f) $z = re^{i\theta}$, con $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $r \in \mathbb{R}^+$

g) $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, con $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{5}{3}\pi$ y $r \in \mathbb{R}^+$

h) $z = \bar{z}$

i) $z = -\bar{z}$

16. Demostrar:

a) Si $z = a + bi$ su inverso multiplicativo es $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$.

b) Si $z = re^{i\theta}$, su inverso multiplicativo es $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

c) El Teorema 1 parte 2, sobre la forma trigonométrica de productos y cocientes de números complejos.

17. Encontrar:

a) Las dos raíces cuadradas de la unidad. Graficar.

b) Las cinco raíces quintas de la unidad. Graficar.

c) Si se encuentra las n raíces, n -ésimas de la unidad, ¿qué figura forman todas ellas?.

18. Si $z = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$:

a) Obtener la forma trigonométrica de z , especificando módulo y argumento. Hacer la representación gráfica.

b) Calcular z^3 , z^4 y $\sqrt[4]{z}$. Graficar.

19. Sea $z = a - ai$ un número complejo (con $a \neq 0$). Obtener:

a) La forma trigonométrica de z , especificando módulo y argumento. Hacer la representación gráfica.

b) La forma exponencial de z .

c) El inverso multiplicativo de z .

d) Para $p \in \mathbb{N}$, z^p y $\sqrt[p]{z}$. (Analizar, si p es par o impar)

20. Si una raíz cúbica de un número complejo z es $w_0 = 2i$. Calcular el número y las otras dos raíces. Graficar.

21. $2+3i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. Encontrar la otra solución.
22. Resolver cada ecuación en el conjunto de los números complejos y graficar las soluciones de:
- a) $z^2 + 4 = 0$ b) $z^2 - 16 = 0$ c) $z^2 - 6z + 13 = 0$
- d) $z^2 - 6z + 10 = 0$ e) $z^3 - 8 = 0$ f) $z^4 - 16 = 0$
- g) $z^4 + 3z^2 - 10 = 0$ h) $\frac{3-i}{3+i}z = i$ i) $z^3 + i = -1$
23. Determinar el carácter de las soluciones de cada ecuación en el conjunto de los números complejos
- a) $3z^2 - 3z + 4 = 0$ b) $2z^2 + 3z - 4 = 0$
- c) $z^2 + 2z + 6 = 0$ d) $9z^2 - 12z + 4 = 0$
24. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3, sabiendo que un vértice está situado en el *eje x*.
25. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro en el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es la parte real de $1 + 2i$.
26. Un estudiante de ingeniería electrónica se interesó en conocer el funcionamiento de las computadoras en cuanto a cómo pueden mostrar un reloj de agujas en la pantalla. Investigando, descubrió que el reloj podía ser representado en el plano cartesiano y que, para cada instante, la posición del minutero representa un número complejo.
- Por ejemplo, suponiendo que la aguja mide 1 (es decir, el módulo del número es 1), 0 minutos representa al número i , 15 minutos representa al número 1, 30 minutos representa al número $-i$, y -1 representa 45 minutos.
- a) ¿Por qué número complejo se debe multiplicar a i para pasar de 0 minutos a 15 minutos?
¿Y para pasar de 0 minutos a 45 minutos?
- b) ¿Cuántos minutos después de cero están representados por los números complejos $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$?

27. La impedancia compleja de un circuito eléctrico constituido por un resistor R , un capacitor C y un inductor L conectados en serie está dada por la siguiente expresión:

$$z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

donde j equivale a la unidad imaginaria i , R , L y C son constantes positivas para un circuito dado, y es una variable real y se le llama pulsación angular de la señal aplicada:

- a) Determine $\omega > 0$ tal que $Im(z) = 0$. Físicamente, se dice que en este caso el circuito se comporta como resistivo puro.
- b) Determine $\omega > 0$ tal que $Im(z) > 0$. Físicamente, se dice que en este caso el circuito se comporta como inductivo.

- c) Determine $\omega > 0$ tal que $Im(z) < 0$. Físicamente, se dice que en este caso el circuito s comporta como capacitivo.
- d) Determine $\omega > 0$ tal que $Re(z) = Im(z)$.

Nota: En electrónica se reemplaza la unidad imaginaria i por j , puesto que el símbolo i es empleado para denotar intensidad de corriente.

28. Los ingenieros electricistas utilizan con frecuencia la forma trigonométrica de los números complejos, para descubrir la intensidad de la corriente I , el voltaje V y la resistencia R de circuitos eléctricos con corriente alterna. La resistencia es la oposición al paso de la corriente en un circuito. La relación entre esas tres cantidades es

$$I = \frac{V}{R}$$

Calcular en cada caso la cantidad desconocida:

- a) Determinación de Voltaje: $I = 10e^{i35}$, $R = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.
- b) Determinación de Resistencia: $V = 8(\cos 5^\circ + i\text{sen}5^\circ)$, $I = 115(\cos \frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4})$.
- c) Voltaje real. La parte real de V representa el voltaje real entregado a un aparato eléctrico, en *volts*. Calcule aproximadamente ese voltaje cuando: $I = 4(\cos \frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2})$, $R = 18(\cos 320^\circ + i\text{sen}320^\circ)$.
- d) Módulo de la Resistencia: el módulo de resistencia $|R|$, representa la oposición total al flujo de corriente en un circuito, y se mide en *ohms*. Calcular $|R|$, si $R = 14 - 13i$.
29. Un brazo de robot tiene una función de transferencia, G , dada por

$$G = \frac{40}{(\omega + \omega i)^4}$$

donde ω es la frecuencia angular. Mostrar que

$$G = -\frac{40}{\omega^4}$$

30. La impedancia específica acústica, z , es dada por

$$z = \frac{p\omega i}{\frac{1}{r} + ki}$$

donde r es la distancia radial, p es la presión acústica y k el número de onda. Mostrar que La resistencia acústica específica es

$$Re(z) = \frac{p\omega kr^2}{1 + k^2r^2}$$

La reactancia acústica específica es

$$IM(z) = \frac{p\omega r}{1 + k^2r^2}$$

Capítulo 3

Lógica

3.1. Introducción

La lógica es una disciplina que estudia la estructura, el fundamento y el uso de las expresiones del lenguaje humano. La utilizamos en nuestra vida cotidiana y una de sus principales tareas es la de proporcionar las reglas por medio de las cuales podemos determinar cuando un razonamiento o argumento es válido. Desde Aristóteles (384-322 a. C.) se trabaja con lógica formal. Actualmente es muy utilizada en todas las ramas de las ciencias y tiene importantes aplicaciones prácticas, por ejemplo sus reglas se utilizan en la escritura de programas de computación y un buen razonamiento lógico es esencial para la construcción y prueba de dichos programas. Otro ejemplo donde la lógica juega un papel fundamental es en el diseño de circuitos digitales. También es fundamental en matemáticas y en sus demostraciones.

3.2. Proposiciones

Los objetos de la lógica son las proposiciones.

Una proposición es una aserción o enunciado expresado en lenguaje coloquial escrito o hablado, mediante una expresión declarativa; que puede ser cierta o falsa, pero no ambas a la vez.

Las proposiciones, en general, son denotadas con las letras p , q , r , etc.

Ejemplo 3.1 1. *Oraciones que son proposiciones:*

- a) *El semáforo está verde.*
- b) *Los autos pueden avanzar.*
- c) *Hoy es 17 de marzo.*
- d) *Hoy es jueves y mañana es lunes.*
- e) *4 es un número par.*

2. *Oraciones que no son proposiciones:*

- a) *Deténgase.*
- b) *¿Quién viene?*
- c) *¿Es divertido este curso?*
- d) *Si $x^2 = 9$ entonces $x = 3$.*

Diremos que es una proposición es simple si no puede dividirse o analizarse por medio de expresiones declarativas más sencillas. Generalmente nuestros razonamientos son más complejos. Es necesario combinar expresiones simples para formar otras más complejas, que son las proposiciones compuestas.

3.2.1. Proposiciones Compuestas y Conectivos Lógicos

A partir de proposiciones simples se pueden generar otras compuestas, agrupándolas mediante conectores, llamados conectivos lógicos; es decir, una proposición compuesta es una proposición que está formada por proposiciones simples unida por conectivos lógicos.

Ejemplo 3.2 *Dadas las proposiciones simples:*

p : El semáforo está verde.

q : Los autos pueden avanzar.

Construimos, por ejemplo, las siguientes proposiciones compuestas:

1. Si p entonces q : “si el semáforo esta verde entonces los autos pueden avanzar”.
2. Si no p entonces no q : “si el semáforo no está verde entonces los autos no pueden avanzar”.

Ejemplo 3.3 *Dada la proposición compuesta:*

1. “Las compuertas lógicas son la base para el desarrollo de circuitos integrados más complejos y el diseño de sistemas digitales”

Las proposiciones simples que la componen son:

p : Las compuertas lógicas son la base para el desarrollo de circuitos integrados más complejos.

q : Las compuertas lógicas son la base para el diseño de sistemas digitales.

2. “Todo número natural múltiplo de 4, es múltiplo de 2”.

Las proposiciones simples que la componen son:

r : Todo número natural es múltiplo de 4.

s : Todo número natural es múltiplo de 2.

El valor de verdad de estas proposiciones compuestas depende del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen y del conectivo que las une. Así, En el caso que *no* se conozcan los valores de verdad de las proposiciones simples que compone, tendremos que analizar todos los posibles casos. Una forma práctica de conocer todos sus posibles valores de verdad, consiste en construir una tabla de verdad, es decir, una tabla que muestre todas las posibilidades para las proposiciones simples y así determinar todos los posibles valores de verdad para la proposición compuesta.

Se puede demostrar que si una proposición compuesta está formada por n proposiciones simples, tendremos que analizar 2^n casos.

En el lenguaje coloquial una misma expresión puede darse de distintas formas. En lógica dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes si tienen la misma tabla de verdad.

A continuación definimos las proposiciones compuestas que surgen de la aplicación de los conectivos lógicos a las proposiciones simples.

3.3. Operaciones con proposiciones

3.3.1. Negación

Definición 3.1 La negación de la proposición p , es la proposición $\neg p$ (se lee no p) que es verdadera cuando p es falsa, y es falsa cuando p es verdadera.

La tabla de verdad es

p	$\neg p$
V	F
F	V

La negación de un enunciado se puede expresar prefijando la frase “no”, “es falso que”, o “no es el caso que”, etc.

Ejemplo 3.4 Dada la proposición p : “Todo hombre es honesto”.

La negación de p es la proposición: $\neg p$: “No todo hombre es honesto”.

o bien:

$\neg p$: No es cierto que todo hombre es honesto.

$\neg p$: hay hombres que no son honestos.

$\neg p$: Existen hombres deshonestos.

Proposición 3.1 $\neg(\neg p)$ es lógicamente equivalente a p .

Demostración. Para verificar esta afirmación analizamos todos los posibles valores de verdad:

Observamos que las columnas de la tabla de verdad de p y $\neg(\neg p)$ son iguales, por lo tanto, las proposiciones son lógicamente equivalentes. ■

3.3.2. Conjunción

Definición 3.2 La conjunción de p y q , denotada con $p \wedge q$, (se lee p y q) es la proposición que es verdadera cuando ambas son verdaderas, y es falsa, cuando p o q , o ambas son falsas.

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 3.5 Dadas las proposiciones p : “3 es un número impar”. q : “8 es un número impar”.

La conjunción $p \wedge q$: “3 y 8 son números impares”.

Por ser p verdadera y q falsa la proposición compuesta $p \wedge q$ es falsa.

3.3.3. Disyunción y Diferencia Simétrica

Una disyunción débil o inclusiva, denotada por $p \vee q$ es verdadera solamente cuando una o ambas alternativas son verdaderas y solamente si los dos alternativas son falsas, la disyunción inclusiva es falsa. El “o” inclusivo tiene el sentido de “cualquiera, posiblemente ambos”. En algunas situaciones se puede re presentar como “y/o”.

Definición 3.3 La disyunción de p y q , denotada con $p \vee q$, es la proposición que es verdadera cuando p o q o ambas son verdaderas, y es falsa, cuando ambas son falsas.

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 3.6 Dadas las proposiciones p : “3 es un número impar” y q : “8 es un número impar”.

La disyunción es: $p \vee q$: “3 o 8 son números impares”. Por ser p verdadera la conjunción es verdadera.

La palabra “o” también se utiliza en un sentido fuerte o exclusivo, en el cual el significado no es “por lo menos uno” sino “uno y sólo uno”. El “o” exclusivo se denota por $p \underline{\vee} q$, y también se lo llama diferencia simétrica.

Definición 3.4 La diferencia simétrica de p y q , denotada con $p \underline{\vee} q$, es la proposición que es si una o la otra pero no ambas es verdadera.

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 3.7 Dada la proposición “El lunes viajaré en colectivo o en avión”. Tenemos que p : “El lunes viajaré en colectivo” y q : “El lunes viajaré en avión”. Observamos que las proposiciones p y q no pueden ser simultáneamente, verdaderas.

3.3.4. Condicional

En el lenguaje coloquial la expresión “si p entonces q ”, supone tácitamente que hay una relación de causa efecto entre p y q . Nunca diríamos: “Si está nevando entonces $3 + 5 = 8$ ”, ya que esté nevando no causa ningún efecto sobre $3 + 5 = 8$. En lógica se emplea el condicional en un sentido mucho más débil. Decir que la proposición compuesta: Si p entonces q , es verdadera, simplemente afirma que si p es verdadera se encontrará entonces que q también es verdadera. En otras palabras, Si p entonces q , dice que no se tendrá una p verdadera y una q falsa al mismo tiempo.

Definición 3.5 El condicional de las proposiciones p y q (si p entonces q) cuya tabla de valores es

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p se la denomina antecedente y a q consecuente.

Ejemplo 3.8 Supongamos que un político promete “si salgo electo, lo impuestos serán más bajos el próximo año”. Si el político no resulta electo seguramente no lo consideraríamos un mentiroso, independientemente de como varíen los impuestos.

Ejemplo 3.9 Consideremos la proposición

$$\text{“Si apruebo el examen entonces te presto el apunte”} \quad (3.1)$$

El antecedente es p : “Apruebo el examen” y el consecuente es q : “Te presto el apunte”.

Queremos inducir la verdad o falsedad del condicional (3.1), en términos de la V o F de las proposiciones p y q . El enunciado (3.1) puede pensarse como un compromiso condicionado por p y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso q .

- Si p es falso, es decir, “Si no apruebo el examen”, quedo liberado del compromiso y preste o no preste el apunte la proposición (3.1) es verdadera.
- Si p es verdadera; es decir “si apruebo el examen” y no presto el apunte (q es falsa) el compromiso no se cumple, y la proposición (3.1) es falsa.
- Por último, si p y q son verdaderas entonces el condicional es verdadero porque el compromiso se cumple. \square

Observación. Al igual que en el lenguaje coloquial un condicional puede expresarse de distintas formas, como por ejemplo:

“Si apruebo el examen entonces te presto el apunte” es equivalente a

1. Si apruebo el examen, te presto el apunte.
2. Te presto el apunte si apruebo el examen.

Observemos que en el caso 1. se enfatiza el antecedente, mientras que en 2. se destaca el consecuente.

Proposición 3.2 $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg p \vee q$.

Demostración. Para probarlo construyamos las tablas de verdad de las dos proposiciones.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como tienen los mismos valores de verdad, las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes. \blacksquare

Otras equivalencias para el condicional son las siguientes:

Condicionales Asociados

Dado el condicional $p \Rightarrow q$, diremos que la proposición $q \Rightarrow p$ es el recíproco, $\sim p \Rightarrow \sim q$ es la contraria y $\sim q \Rightarrow \sim p$ es la contrarecíproca de $p \Rightarrow q$.

Ejemplo 3.10 Consideremos la proposición compuesta, $p \Rightarrow q$: “Si está lloviendo entonces hay nubes en el cielo”. Ésta es una proposición verdadera.

Su recíproca $q \Rightarrow p$ se lee: Si hay nubes en el cielo entonces está lloviendo. Ésta es una proposición que puede ser verdadera o falsa.

La contraria $\sim p \Rightarrow \sim q$, dice: Si no está lloviendo entonces no hay nubes en el cielo. Ésta es una proposición que puede ser verdadera o falsa.

La contrarecíproca $\sim q \Rightarrow \sim p$ dice: Si no hay nubes en el cielo entonces no está lloviendo. Es una proposición verdadera.

El siguiente resultado muestra la relación entre los distintos condicionales asociados

Proposición 3.3 La proposición condicional $p \Rightarrow q$ y su contrarecíproca $\sim q \Rightarrow \sim p$ son lógicamente equivalentes.

Demostración. Para demostrarlo construimos las tablas de verdad de los dos condicionales:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Como las tablas son iguales, $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalentes a $\sim q \Rightarrow \sim p$. ■

Una consecuencia de la Proposición 3.3 es

Corolario 3.1 Los contrarecíprocos son lógicamente equivalentes, es decir

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) &\equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \\ (q \Rightarrow p) &\equiv (\sim p \Rightarrow \sim q).\end{aligned}$$

Mientras que no son lógicamente equivalentes los recíprocos ni los contrarios, es decir

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) &\not\equiv (q \Rightarrow p) \\ (p \Rightarrow q) &\not\equiv (\sim p \Rightarrow \sim q).\end{aligned}$$

En matemática cuando trabajamos con condicional verdadero lo realizamos de la siguiente forma:

Condición necesaria y suficiente

Definición 3.6 Si $p \Rightarrow q$ es siempre V, diremos que “ $p \Rightarrow q$ ” es una implicación y que:

p es condición suficiente para q y q es condición necesaria para p .

Ejemplo 3.11 Consideremos la proposición “Si un número es múltiplo de 6 entonces es múltiplo de 3”.

El antecedente es p : Un número es múltiplo de 6.

El consecuente es q : Un número es múltiplo de 3.

Si queremos inducir la verdad o falsedad de la implicación, en términos de la V o F de las proposiciones p y q , Podemos observar que nunca se puede dar el caso que p sea verdad y q sea falso por lo tanto la proposición condicional $p \Rightarrow q$, siempre será verdadera y se lee:

- Si un número es múltiplo de 6 implica que es múltiplo de 3.
- Que un número sea múltiplo de 6 es condición suficiente para que sea múltiplo de 3.
- Que un número sea múltiplo de 3 es condición necesaria para ser múltiplo de 6.
- Un número es múltiplo de 6 solo si es múltiplo de 3

3.3.5. Bicondicional

Definición 3.7 La proposición “ p sí y sólo sí q ” denotada con $p \Leftrightarrow q$, es verdadera si ambas p y q , son verdaderas o si ambas p y q son falsas, es decir que ambas tienen el mismo valor de verdad.

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo 3.12 Si a, b son números reales y dadas las proposiciones simples $p : a > b$ y $q : a - b > 0$. El bicondicional de p y q , es $p \Leftrightarrow q : “a > b$ si y solo si $a - b > 0”$, que es una proposición falsa.

El bicondicional es lógicamente equivalente a la conjunción de un condicional y su recíproco. De este modo, la tabla de valores de verdad de $p \Leftrightarrow q$, la obtenemos mediante la tabla de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, como sigue

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F	V

Es decir, $p \Leftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Hablamos de doble implicación cuando el bicondicional es verdadero y leemos la doble implicación como si y solo si.

También podemos leer la doble implicación $p \Leftrightarrow q$ como: “ p es condición necesaria y suficiente para q ”.

3.4. Leyes Lógicas o Tautologías

Las proposiciones compuestas las clasificaremos en tautologías y contradicciones. Una ley lógica o tautología es verdadera independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen, es decir, que es verdadera en cualquier circunstancia. Y una contradicción es falsa independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen. es decir, que es falsa en cualquier circunstancia.

Ejemplo 3.13 1. Modus Ponens

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q,$$

la tabla de valores de verdad es

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. Silogismo hipotético de Aristóteles

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r),$$

Como tenemos tres proposiciones simples la tabla de valores tendrá ocho filas.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Es inmediato observar que la negación de una tautología es una contradicción y la negación de una contradicción es una tautología.

Ejemplo 3.14 La tabla de valores de verdad que se presenta para la proposición $p \vee \sim p$ es una tautología, y para la proposición $p \wedge \sim p$, es una contradicción:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Para saber si dos proposiciones son lógicamente equivalentes construimos la tabla de verdad de ambas y comprobamos que los valores de verdad son iguales para todas sus posibles interpretaciones. Por lo tanto, p y q son lógicamente equivalentes si y solo si $p \Leftrightarrow q$ es una tautología.

Ejemplo 3.15 Para probar que la tautología $(p \vee \sim p)$ y la negación de la contradicción $(p \wedge \sim p)$ son lógicamente equivalentes, construimos la tabla de verdad de $(p \vee \sim p) \iff \sim (p \wedge \sim p)$.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$	$(p \vee \sim p) \iff \sim (p \wedge \sim p)$
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V

La siguiente tabla muestra las leyes lógicas o tautologías más usada en el cálculo proposicional.

	Nombre	Proposición	Proposición lógicamente equivalente
1	Involución	$\sim (\sim p)$	p
2	Idempotencia	$p \wedge p$ $p \vee p$	p
3	Conmutatividad	$p \wedge q$ $p \vee q$	$q \wedge p$ $q \vee p$
4	Asociatividad	$(p \wedge q) \wedge r$ $(p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r)$ $p \vee (q \vee r)$
5	Distributividad	$(p \wedge q) \vee r$ $(p \vee q) \wedge r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
6	Ley de De Morgan	$\sim (p \vee q)$ $\sim (p \wedge q)$	$\sim p \wedge \sim q$ $\sim p \vee \sim q$
7	Contrarrecíproco	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
8	Implicación	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
9	Ley de Absorción	$[(p \wedge q) \vee p]$ $[(p \vee q) \wedge p]$	p

Usamos estas propiedades podemos demostrar, sin necesidad de realizar las tablas de verdad, que dos proposiciones son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 3.16 Probar que:

$$1. \sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q.$$

$$2. p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \sim q) \Rightarrow r.$$

Solución.

Usando las propiedades de las proposiciones, dadas en la tabla anterior, tenemos:

Ejemplo 3.17 1. $\sim (p \Rightarrow q) \stackrel{(8)}{\equiv} \sim (\sim p \vee q) \stackrel{(6)}{\equiv} \sim (\sim p) \wedge \sim q \stackrel{(1)}{\equiv} p \wedge \sim q.$

$$2. p \Rightarrow (q \vee r) \stackrel{(8)}{\equiv} \sim p \vee (q \vee r) \stackrel{(4)}{\equiv} (\sim p \vee q) \vee r \stackrel{(6)}{\equiv} \sim (p \wedge \sim q) \vee r \stackrel{(8)}{\equiv} (p \wedge \sim q) \Rightarrow r. \quad \square$$

3.5. Funciones Proposicionales. Cuantificación.

Es frecuente en el lenguaje habitual usar expresiones como

p : Ana es japonesa mientras que Gabriel no lo es.

Con las herramientas del cálculo proposicional podemos representar esta proposición mediante el uso de conectores y proposiciones simples. De modo que podemos convenir en que

$$\begin{array}{ll} q : \text{Ana es japonesa} & \text{Por lo tanto} \quad p : q \wedge r \\ r : \text{Gabriel no es japonés} & \end{array}$$

Sin embargo notemos que q y r son muy parecidas estructuralmente: ambas dicen que alguien tiene la cualidad de ser o no japonés. La palabra alguien corresponde a la noción más general de individuo u objeto y la palabra cualidad hace referencia a la noción general de propiedad (o predicado). Ahora podemos simbolizar los individuos y las propiedades de modo que las proposiciones consistan en combinaciones de ellas, más los conectivos lógicos.

Si simbolizamos los objetos así:

$$\begin{array}{l} g : \text{Gabriel,} \\ a : \text{Ana,} \end{array}$$

y la propiedad “*tener nacionalidad japonesa*” por la letra J .

Así tenemos que “Ana es japonesa mientras que Gabriel no lo es” se simbolizará:

$$p : J(a) \wedge \sim J(g)$$

Oraciones donde aparezcan variables dá lugar a lo que llamaremos funciones proposicionales.

Definición 3.8 *Una función proposicional de una variable x , es toda oración en la que figura x como sujeto u objeto directo, la cual, se convierte en proposición para cada valor particular de x .*

Las funciones proposicionales serán denotadas por $P(x)$, $Q(x)$, etc.

Ejemplo 3.18 *Analícemos la siguiente oración:*

$$\text{si } x^2 = 9 \text{ entonces } x = 3, \quad (3.2)$$

esta no es una proposición, por que no podemos decidir sobre su verdad o falsedad, ésta depende de los valores que tome la variable x . Así si $x = 3$ el condicional será verdadero, mientras que si $x = -3$, será falso. Por lo tanto en (Matriz de coeficientes) tenemos la siguiente función proposicional:

$$P(x) : \text{si } x^2 = 9 \text{ entonces } x = 3,$$

Cuando asignamos valores a x , la función proposicional se convierte en una proposición en la que podemos decidir su valor de verdad.

$$\begin{array}{ll} P(3) & \text{es una proposición verdadera,} \\ P(-3) & \text{es una proposición falsa,} \\ P(1) & \text{es una proposición verdadera.} \end{array}$$

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones mediante un proceso llamado de *cuantificación*. Los cuantificadores asociados a la indeterminada x son: $\forall x$ y $\exists x$, denominados cuantificador universal y existencial respectivamente.

Una función proposicional $P(x)$ cuantificada universalmente, $\forall x : P(x)$, es verdadera si y sólo si todas las proposiciones particulares asociadas a $P(x)$ son verdaderas. En cambio, para que la función proposicional $P(x)$ cuantificada existencialmente, $\exists x/P(x)$, sea verdadera, sólo se necesita la verdad de al menos una de las proposiciones asociadas a $P(x)$.

Retornando al ejemplo, si expresamos:

- $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3.$
- $\exists x \in \mathbb{Z} / x^2 = 9 \Rightarrow x = 3.$

Es claro que si decimos todo número entero cumple que si $x^2 = 9$ entonces $x = 3$, hemos enunciado una proposición falsa. Por otro lado, si decimos existe al menos un número entero que cumple que si $x^2 = 9$ entonces $x = 3$ tenemos una proposición verdadera.

Para negar una función proposicional cuantificada existencialmente se cambia el cuantificador en universal, y se niega la función proposicional. Es decir, tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \neg [\forall x : P(x)] &\equiv \exists x / \neg P(x) \\ \neg [\exists x / P(x)] &\equiv \forall x : \neg P(x) \end{aligned}$$

En nuestro caso para obtener la negación de $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, en lenguaje simbólico obtenemos:

$$\begin{aligned} \neg [\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3] \\ \equiv \exists x \in \mathbb{Z} / \neg [x^2 = 9 \Rightarrow x = 3] \\ \equiv \exists x \in \mathbb{Z} / [x^2 = 9 \wedge x \neq 3]. \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra la importancia del dominio o conjunto de definición de la variable x .

Ejemplo 3.19 Dada la función proposicional: $P(x) : x^2 = -1$, consideremos las proposiciones

$$\exists x \in \mathbb{R} / P(x)$$

Es falsa por que no existe ningún número real tal que $x^2 = -1$,

$$\exists x \in \mathbb{C} / P(x)$$

Es verdadera por que existe el número complejo $x = 0 + 1i$ tal que $(0 + 1i)^2 = -1$.

3.6. Circuitos lógicos

Una de las aplicaciones de la lógica son los circuitos lógico, que son la base de los circuitos eléctricos, de los sistemas digitales, etc. La electrónica moderna se basa en los circuitos lógicos digitales, los cuales adoptan dos posibles valores, a primera vista esto parece relativamente simple, pero los circuitos electrónicos son bastante complejos ya que su estructura puede está compuesta por un número muy grande de circuitos simples, donde todos deben funcionar de la manera correcta, para lograr el resultado esperado y no obtener una información errónea.

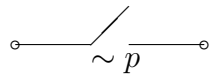
Existe, en las matemáticas, una estructura matemática denominada Algebra de Boole, que fue desarrollada originalmente por George Boole, alrededor de 1850. La importancia de esta álgebra deriva de los trabajos de Claude Shannon en 1937, quién la utiliza para describir los circuitos digitales.

Nosotros daremos las nociones básicas de circuitos lógicos, interpretados como circuitos eléctricos. En los que la verdad de una proposición puede asociarse al pasaje de corriente a través de un circuito eléctrico con un interruptor y la falsedad por la interrupción del paso de corriente.

Para representar una proposición p , si es V , (pasaje de corriente) se tiene



Si p es F , (interrupción del paso de corriente.),



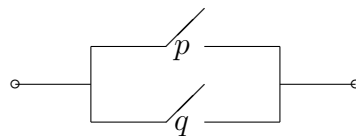
Las operaciones entre proposiciones puede representarse mediante circuitos con tantos interruptores como proposiciones simples componentes, combinados en serie o en paralelo.

Conjunción. Esta operación se representa por un circuito en serie.



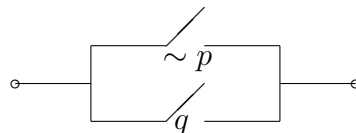
Este circuito admite el pasaje de corriente, es decir, la verdad de $p \wedge q$, solo si las dos proposiciones son verdaderas.

Disyunción. Esta operación se representa por un circuito en serie.

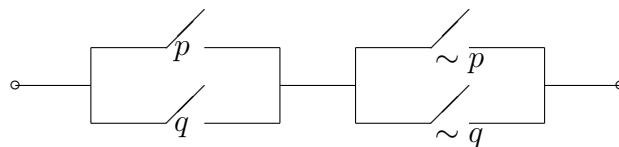


La falsedad de $p \vee q$, es decir, que no pase corriente, solo se verifica en el caso de la falsedad simultanea de p y q .

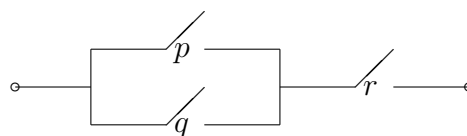
Condiciona. Como $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ el circuito asociado es:



Diferencia simétrica. Como $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$



Ejemplo 3.20 El circuito correspondiente a la proposición $(p \vee q) \wedge r$ es:



3.7. Ejercicios

1. Decir cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones, dando en cada caso, su valor de verdad.

- a) Un número complejo igual a su conjugado es un número real.
- b) El producto de dos números positivos.
- c) Todo cuadrado es un rombo.
- d) $15 - 9 = 6$.
- e) $6 + 2 = 14$.
- f) Existe un número entero x tal que $3x = 5$.
- g) Para todo número entero n , $n \leq 100$.
- h) Obtenga las cuatro raíces cuartas del número complejo 5.
- i) ¿Qué hora es?
- j) Para todo x racional $x + y$ es racional.

2. Sean p , q y r las proposiciones:

p : Hoy es feriado

q : Mañana es laborable

r : Hoy es lunes

Escribir en forma simbólica:

- a) Hoy es feriado y mañana es laborable
- b) Si hoy es feriado entonces hoy es lunes y mañana no es laborable.
- c) Mañana es laborable y hoy no es feriado, ó hoy es lunes.

3. En el libro Hijos en libertad, de A.S. Neill, están escritas las siguientes proposiciones

p : Mis maestros hacen que todas las lecciones sean aburridas.

q : No aceptan las respuestas que no figuran en los libros.

r : Imponen un cúmulo de normas estúpidas.

Construir las proposiciones

$$p \wedge q, \quad \sim q \vee r, \quad (p \wedge q) \Rightarrow r$$

4. Escribir en forma simbólica la siguiente proposición compuesta que figura en el mismo texto:

”La chatura y el tedio de ciertas disciplinas escolares se transmiten a los maestros, y las escuelas se llenan de hombres y mujeres de mentalidad estrecha, vanidosos y cuyo horizonte está limitado por el pizarrón y el libro de texto”.

5. Confeccionar en cada ítem una tabla de verdad:

- a) $\sim p \wedge q$
- b) $\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim q$
- c) $p \wedge \sim q$
- d) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
- e) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow q$
- f) $p \wedge (q \Rightarrow r)$
- g) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
- h) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

6. Los valores de verdad de las proposiciones p, q, r y s son respectivamente V, F, F y V . Obtener los valores de verdad de:
- a) $q \vee [s \wedge (q \vee r)]$ b) $r \Rightarrow (s \wedge p)$ c) $(p \vee r) \Rightarrow (r \wedge \sim s)$
7. Determinar los valores de verdad de las proposiciones siguientes:
- a) $2 \geq 3$ ó 5 es un entero positivo
 b) Si 5 no es un entero positivo, entonces $2 < 3$.
8. En cada caso, analizar si la información que se aporta es suficiente para determinar el valor de verdad de la correspondiente proposición. En caso afirmativo, justificarlo.
- a) $\sim (p \wedge q) \Rightarrow q; p \Rightarrow q$ es F c) $p \wedge (q \Rightarrow r); p \Rightarrow r$ es V .
 b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r); p$ es V d) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow q; p \vee q$ es V y $\sim q$ es V
9. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son leyes lógicas (tautologías):
- a) $q \vee (\sim q \wedge p)$ b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$
 c) $(q \Rightarrow p) \iff (\sim p \Rightarrow \sim q)$ d) $[(p \iff q) \wedge (q \Rightarrow r)] \iff (p \iff r)$
10. Demostrar las siguientes equivalencias, teniendo en cuenta que $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q) \equiv (p \vee q)$
 b) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$
11. Encontrar una proposición lógicamente equivalente a $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
12. Verificar que para probar la equivalencia de las proposiciones p, q y r es suficiente demostrar las siguientes implicaciones:
- $$p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r \quad \text{y} \quad r \Rightarrow p$$
13. Escribir los condicionales recíproco, contrario y contrarrecíproco de los siguientes condicionales directos:
- a) Si esta lloviendo, hay nubes en el cielo.
 b) Si un número par es divisible por 3 entonces es múltiplo de 6.
 c) Un entero es múltiplo 6, sólo si es divisible por 2.
 d) Si el cuadrilátero ABCD tiene sus lados opuestos paralelos entonces ABCD es un rectángulo.
14. ¿Cuáles de los condicionales del ejercicio anterior son implicaciones? En tal caso determinar cual es la condición suficiente y cual la necesaria.
15. Suponiendo verdadero el condicional “Jugaré al fútbol si tengo la tarde libre” ¿cuál es la condición suficiente y cuál la necesaria?
16. Dadas las proposiciones

- a) El cuadrado de todo número real es mayor que 2.
- b) Existen enteros cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente.
- c) Todo el que estudia, triunfa.

Expresarlas simbólicamente, negar las expresiones obtenidas y reducir las al lenguaje coloquial.

17. Negar las siguientes proposiciones:

- a) $\exists x / P(x) \vee \sim Q(x)$.
- b) $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$.
- c) $\forall x \exists y / x \cdot y = 0$

18. Para una función real a valores reales f , se dice que “la constante L es el límite de la función f cuando x tiende a x_o ” si:

$$\forall \xi > 0 \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \xi$$

Esto se conoce como definición ξ, δ de límite. Expresar mediante una proposición cuantificada el significado de la frase “ L no es el límite de f cuando x tiende a x_o ”.

19. Sean las funciones proposicionales: $P(z) : z$ es real ; $Q(z) : z$ es imaginario puro; y $R(z, w) : z + w = 0$, donde las variables z y w representan números complejos. Considerar las proposiciones cuantificadas:

- a) $\exists z / Q(z)$ c) $\exists w / P(w) \wedge R(-1, w)$ e) $\forall z : \exists w / R(z, w)$
- b) $\forall z : P(z, \bar{z})$ d) $\forall w : P(w) \Rightarrow \sim Q(w)$

Para cada proposición:

- a) 1) Enunciarla en forma coloquial.
- 2) Obtener su negación simbólicamente.
- 3) Enunciar su negación coloquialmente.

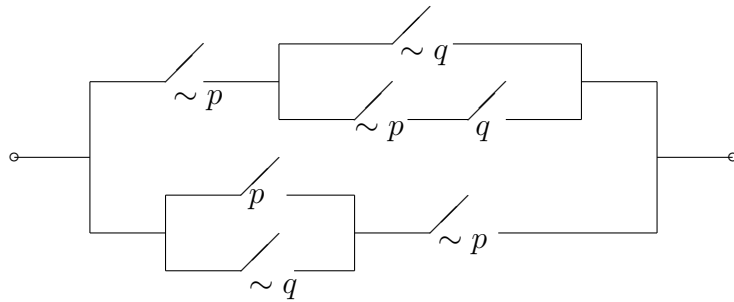
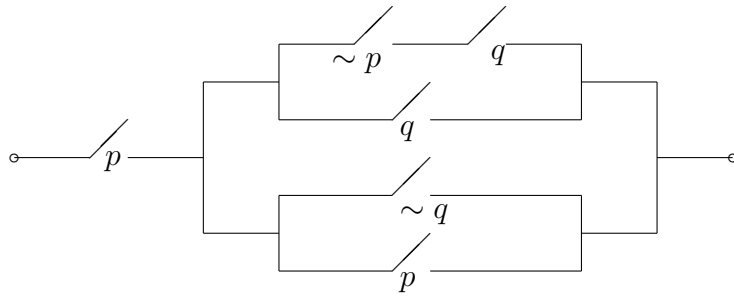
20. Construir el circuito correspondiente a las proposiciones dadas:

- a) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- c) $(p \wedge q) \vee (\sim q)$ d) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$.

21. Simplificar las siguientes proposiciones y dibujar el circuito correspondiente:

- a) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
- b) $\sim \{ \sim [\sim (p \vee q) \wedge (\sim r)] \vee (\sim p) \}$
- c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim (p \vee q)$.

22. Dados los circuitos siguientes determinar la proposición que los representa, Simplificarla y graficar el circuito correspondiente.



Capítulo 4

Razonamiento Deductivo y Métodos de demostración

Todo desarrollo matemático exige razonar en forma válida acerca de cosas trascendentes y particularmente abstractas, por esto en este capítulo usaremos las herramientas de la lógica para analizar cuando un razonamiento es válido. Además enunciaremos los métodos de demostración mas utilizados en Matemática.

4.1. Razonamiento Deductivo

Cuando obtenemos o derivamos proposiciones a partir de otras proposiciones, siguiendo ciertas leyes se está realizando un razonamiento.

Definición 4.1 Dado un par ordenado $(\{p_i\} : q)$, siendo $\{p_i\}$ un conjunto finito de proposiciones (simples o compuestas), llamadas premisas y q una proposición llamada conclusión, diremos que es un razonamiento o argumento si la conclusión se deriva de las premisas, siguiendo ciertas leyes (axiomas, propiedades, etc) llamadas Leyes Lógicas.

Simbolizamos escribiremos:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \hline p_n \\ \therefore q \end{array}$$

en donde el símbolo \therefore significa *por lo tanto*.

En matemática interesa el tipo de razonamientos llamados deductivos que consisten en el análisis del condicional

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q \quad (4.1)$$

A las proposiciones p_1, p_2, \dots, p_n las denominaremos son las premisas o hipótesis y a q es la conclusión o tesis.

El razonamiento será válido cuando el condicional (4.1) sea una implicación. Caso contrario diremos que es un razonamiento no válido.

Para analizar si un razonamiento es válido se puede proceder de dos formas distintas:

1. Por medio de una tabla de verdad verificar que el condicional (4.1) es una implicación.

2. Sin usar tabla de verdad, verificando que siempre que las hipótesis sean verdaderas, la conclusión también es verdadera.

Ejemplo 4.1 Razonamiento Modus Ponens

El razonamiento $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$, llamado Modus Ponens, es válido. Esto se puede analizar de dos formas:

1. Por medio de una tabla de verdad, ya vimos que $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ es una tautología, por lo tanto, el condicional es una implicación, luego el razonamiento es válido.
2. Sin usar tabla de verdad, si suponemos que $p \Rightarrow q$ y p sean verdaderas. Entonces q debe ser verdadera, ya que en caso contrario $p \Rightarrow q$, sería falsa. Por tanto, el razonamiento es válido.

Ejemplo 4.2 Razonamiento de Modus Tollens

El razonamiento $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$, llamado razonamiento de Modus Tollens, es válido.

Para analizarlo suponemos que $p \Rightarrow q$ y $\sim q$ sean verdaderas; q es falso, por lo que p es falso dado que $p \Rightarrow q$ es verdadero. Luego $\sim p$ es verdadero. Por tanto, el razonamiento es válido.

Ejemplo 4.3 Representar los siguientes razonamientos en forma simbólica y determinar si son válidos:

- Si el semáforo está en verde, entonces los autos pueden avanzar. Observamos que el semáforo está verde. Concluimos que los coches pueden avanzar.

Si consideramos:

Premisa 1: Si el semáforo está en verde, los autos pueden avanzar.

Premisa 2: Observamos que el semáforo está en verde.

– Concluimos: Los autos pueden avanzar

Si se hace:

$$p : \text{El semáforo está en verde} \quad q : \text{Los autos pueden avanzar}$$

el razonamiento puede escribirse en forma simbólica:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

y en forma de condicional:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Podemos ver basado en el razonamiento Modus Ponens que este razonamiento es lógicamente válido.

- Si se produce un robo, desaparecerán objetos. Observamos que no han desaparecido objetos. Concluimos que no se ha producido un robo.

Si consideramos:

Premisa 1: Si se produce un robo, entonces desaparecerán objetos.

Premisa 2: No han desaparecido objetos.

– Concluimos: No se ha producido un robo.

Si se hace

$$p : \text{Se produce un robo} \\ q : \text{Han desaparecido objetos}$$

el razonamiento puede escribirse como

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow \sim p$$

Por el razonamiento de Modus Tollens, este razonamiento es lógicamente válido.

- Si Juan obtiene el ascenso, se compra un auto. Observamos que Juan se compra un auto.

Concluimos que Juan obtuvo el ascenso.

Si consideramos:

Premisa 1: Si Juan obtiene el ascenso, se compra un auto.

Premisa 2: Juan se compra un auto.

– Concluimos: Juan obtuvo el ascenso.

Si se hace

p : Juan obtiene el ascenso

q : Juan se compra un auto

El razonamiento puede escribirse como

$$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$$

Aun suponiendo que $p \Rightarrow q$ y q sean verdaderas, p puede ser verdadera o falsa, entonces el razonamiento no es válido. \square

4.2. Métodos de demostración

Para realizar una demostración de modo correcto es esencial tener en cuenta las reglas de inferencia, que son los razonamientos válidos, y el lenguaje matemático. También es de gran ayuda un poco de intuición. Existen diferentes métodos algunos de los cuales expondremos a continuación.

4.2.1. Forma directa

El método más natural es la demostración en forma directa, que consiste en probar que las hipótesis p_1, p_2, \dots, p_n implican la tesis q , es decir, que el razonamiento $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$ es válido.

Ejemplo 4.4 Probar que:

Si a es un número natural impar, entonces su cuadrado también es impar.

Demostración: En este caso la hipótesis es “ a es un número natural impar” y la tesis es “ a^2 es impar”.

Debemos probar que a^2 es impar. Como a es impar entonces $a = 2k + 1$ con $k \in N \cup \{0\}$. Luego

$$a^2 \underset{(1)}{=} (2k + 1)^2 \underset{(2)}{=} 8k^2 + 4k + 1 \underset{(3)}{=} 2(4k^2 + 2k) + 1,$$

por lo que, efectivamente, a^2 es impar.

Reglas de Inferencia:

(1) : a impar.

(2) : Desarrollo del binomio cuadrado perfecto.

(3) : Factor común. \square

Ejemplo 4.5 Probar que:

Dados a y b números reales, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (a - b)(a + b) &= (a - b)a + (a - b)b & (1) \\ &= aa - ba + ab - bb & (2) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 & (3) \\ &= a^2 - b^2 & (4) \end{aligned}$$

Reglas de Inferencia:

- (1) y (2) Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
- (3) Propiedad conmutativa del producto.
- (4) Propiedad cancelativa. □

4.2.2. Demostración por contrarrecíproco

Si queremos demostrar que $p \Rightarrow q$ es una implicación por contrarrecíproco, nos basamos en la ley lógica:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Ejemplo 4.6 Probar la siguiente implicación:

Un número natural es par, si su cuadrado también lo es.

Demostración.

Queremos probar que:

a^2 es par es *condición suficiente* para que a sea par.

En este caso tenemos $p : a^2$ es un número natural par y $q : a$ es par.

Por el Contrarrecíproco tenemos: Si a no es par entonces a^2 no es par, o Si a es impar entonces a^2 es impar y esta implicación ya hemos probado que es válida. □

4.2.3. Demostraciones por reducción al absurdo

Además de los métodos ya dados para demostrar que $p \Rightarrow q$ es una implicación, existe otro método de demostración llamado método de demostración por el *absurdo* ó *contradicción* que parte de la verdad del antecedente, p y de la falsedad del consecuente, q y llega a una contradicción ó absurdo, donde esto último significa contradecir algo previamente establecido como postulado.

Ejemplo 4.7 Probar que: $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Demostración.

En este enunciado la implicación a demostrar no se observa explícitamente. Debemos tener en cuenta que el hecho de que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ es hipótesis general, por lo que la implicación a demostrar es $p \Rightarrow q$ donde $p : \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $q : \sqrt{2}$ no es un número racional. Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ y lleguemos a una contradicción.

Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, supongamos que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \tag{4.2}$$

y, sin pérdida de generalidad supondremos que esta expresión es irreducible (el máximo común divisor de a y b es 1). Entonces como $b \neq 0$

$$b\sqrt{2} = a$$

Por lo tanto

$$b^2 2 = a^2 \tag{4.3}$$

Luego a^2 es un número entero par, entonces por el ejemplo anterior, a es un número entero par, es decir:

$$a = 2s \quad \text{para algún } s \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Luego

$$b^2 2 \stackrel{(4.3)}{=} a^2 = (2s)^2 = 4s^2$$

Entonces

$$b^2 = 2s^2 = 2k,$$

Así b^2 es un número entero par, entonces b es un número entero par, es decir:

$$b = 2t \quad \text{para algún } t \in \mathbb{Z}, t \neq 0 \text{ (ya que } b \neq 0) \tag{4.5}$$

Luego reemplazando (4.4) y (4.5) en (*Matrizaumentada*)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2s}{2t}$$

lo que contradice que $\frac{a}{b}$ sea irreducible. La contradicción proviene de suponer que $\sqrt{2}$ es racional. Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es un número racional. \square

En la siguiente sección daremos un método de demostración utilizado para demostrar proposiciones que son válidas para todos los números naturales mayores o iguales que un natural determinado.

4.3. Inducción Matemática

Se dice que el gran matemático y físico Karl Friedrich Gauss encontró, siendo un niño, la fórmula para calcular la suma de los primeros 100 números naturales.

La anécdota con respecto a Gauss (también llamado el Príncipe de las Matemáticas) es más o menos así: Corría 1789 y Gauss estaba en el salón de clases, como buen niño inquieto, empezó a desesperar al profesor. Éste, para entretenerlo, le pidió que obtuviera la suma de los primeros 100 números naturales, creyendo que lo iba a demorar un buen rato. Sin embargo, Gauss encontró la respuesta en menos tiempo del que había considerado el profesor. Se dice que el razonamiento de Gauss, con tal de no trabajar mucho, fue el siguiente:

Primero ordenó los 100 números del siguiente modo:

1	2	3	...	49	50	
100	99	98	...	52	51	
101	101	101	...	101	101	Hay 50 sumas

y observo que hay 50 sumas, que es la mitad de 100, cuya suma es 101. Entonces la suma de los 100 números será: $(101)(50) = 5050$. Este es el resultado pedido por el maestro.

Si introducimos la siguiente notación : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$, la suma de Gauss se puede representar por

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100}{2} 101 = 5050$$

Si se realiza la suma de los n primeros números, en lugar de los 100 primeros, esta suma es

$$p(n) : \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

¿Cómo podríamos demostrar la validez de esta proposición? Es imposible verificar una a una la veracidad de las infinitas proposiciones $p(n)$. El principio de inducción matemática es un axioma con el cual podremos probar este tipo de afirmaciones, es decir probaremos la validez de un enunciado del tipo $\forall n : p(n)$.

4.3.1. Principio de Inducción Matemática

Una función proposicional $P(n)$ es válida para todo número entero $n \geq n_0$ si:

1. Si $P(n_0)$ es una proposición válida.
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es una implicación para todo $k \geq n_0$.

Ejemplo 4.8 *Demostrar la validez de la generalización del problema de Gauss, es decir, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$p(n) : \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

es verdadera.

Solución.

1. Primero verificamos que la función proposicional

$$p(n) : \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

se cumple con $n = 1$.

Observamos que: $\sum_{i=1}^1 i = 1$ y que $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, por lo tanto es válido para $n = 1$.

2. Queremos probar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es una implicación para todo $k \geq 1$.

Para ello suponemos que la función proposicional es válida para un número $n = k$, es decir

$$\sum_{i=1}^k i = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{H.I.}$$

Bajo esta hipótesis, debemos mostrar que la función proposicional es válida para $n = k + 1$. Es decir, hay que probar que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

En efecto:

Por nuestra hipótesis de inducción, podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (k+1) \stackrel{H.I.}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

y realizando operaciones algebraicas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

que es el objetivo esperado.

Luego, por el principio de inducción hemos probado que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

es una proposición válida. □

Ejemplo 4.9 *Demostrar que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : (xy)^n = x^n y^n$$

con x, y números reales.

Solución.

Siguiendo el método de inducción, se debe realizar dos pasos. Esto es,

1.- Primero hay que verificar que la proposición es verdadera para $n = 1$, es decir hay que mostrar que:

$$(xy)^1 = x^1 y^1,$$

pero esto se cumple por la definición de potencia de números reales.

2.- Queremos probar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es una implicación para todo $k \geq 1$.

Para ello suponemos que la proposición es válida para un número $n = k$, es decir,

$$(xy)^k = x^k y^k \tag{H.I.}$$

es válida.

Bajo esta hipótesis, debemos mostrar que la proposición es válida para $n = k + 1$. Es decir, hay que probar que

$$(xy)^{k+1} = x^{k+1} y^{k+1}$$

Esto se cumple ya que

$$\begin{aligned} (xy)^{k+1} &= (xy)^k (xy)^1 && \text{(Definición de potencia en } \mathbb{R} \text{)} \\ &= x^k y^k xy && \text{(H.I.)} \\ &= x^k xy^k y && \text{(Propiedad conmutativa en } \mathbb{R} \text{)} \\ &= x^{k+1} y^{k+1} && \text{(Definición de potencia en } \mathbb{R} \text{).} \end{aligned}$$

que es el objetivo esperado.

Luego, por el principio de inducción hemos probado que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (xy)^n = x^n y^n$$

es una proposición válida. □

Ejemplo 4.10 *Demostrar el Teorema de Moivre.*

Debemos probar que si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$P(n) : z^n = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta). \quad (4.6)$$

Solución.

Se pueden presentar tres casos:

Caso1:

Consideremos $n \in \mathbb{Z}^+$ y probemos el resultado por inducción.

1. Si $n = 1$ la igualdad (4.6) es inmediata.
2. Queremos probar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ es una implicación para todo $k \geq 1$.

Para ello suponemos que la proposición es válida para $n = k$, es decir,

$$P(k) : (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^k = r^k (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \quad (\text{H.I.})$$

y debemos probar que la igualdad vale para $n = k + 1$.

En efecto:

$$\begin{aligned} (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^{k+1} &\stackrel{(1)}{=} (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^k (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^1 \\ &\stackrel{(2) \text{ (H.I)}}{=} r^k (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) r^1 (\cos 1\theta + i \operatorname{sen} 1\theta) \\ &\stackrel{(3)}{=} r^{k+1} (\cos (k+1)\theta + i \operatorname{sen} (k+1)\theta) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Luego

$$P(k+1) : (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^{k+1} = r^{k+1} (\cos (k+1)\theta + i \operatorname{sen} (k+1)\theta)$$

Es verdadera. Por lo tanto por el principio de inducción matemática la igualdad

$$(r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

se válida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Reglas de Inferencia utilizadas en (4.7):

- (1) Potencia de números complejos.
- (2) Por paso 1.
- (3) Producto de números complejos en forma trigonométrica.

Caso2:

Si n es un entero negativo, entonces $n = (-1)(-n)$ con $(-n) \in \mathbb{Z}^+$, Además

$$z^n = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^n = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{(-1)(-n)} \stackrel{(4)}{=} [(r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^{-1}]^{-n} \quad (4.8)$$

Por otra parte en el capítulo de números complejos se demostró que el inverso multiplicativo de $z \in \mathbb{C}$, en forma trigonométrica es:

$$z^{-1} = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^{-1} = r^{-1}(\cos(-1)\theta + i \operatorname{sen}(-1)\theta) \quad (4.9)$$

Por lo tanto de (4.8) y(4.9) resulta

$$z^n = [r^{-1}(\cos(-1)\theta + i \operatorname{sen}(-1)\theta)]^{-n} \stackrel{(5)}{=} r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Notemos que las reglas de inferencia utilizada son:

(4) Propiedades de potencia de números complejos.

(5) Por caso 1.

Caso 3.

Si $n = 0$ tenemos que $z^0 = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^0 = 1$ y

$r^0(\cos 0\theta + i \operatorname{sen} 0\theta) = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$.

Por lo tanto

$$P(n) : z^n = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

es válida para todo n entero. □

Ejemplo 4.11 Demuestre que la función proposicional $P(n) : 2^n > n + 20$, es una proposición verdadera para todo $n \geq 5$.

Solución.

- Primero hay que verificar que la función proposicional es verdadera para $n = 5$, es decir, hay que mostrar que:

$$2^5 > 5 + 20$$

pero esto se cumple ya que

$$2^5 = 32 > 25 = 5 + 20$$

(notar que $P(1), P(2), P(3)$ y $P(4)$ son falsas).

- Suponiendo que la función proposicional es válida para un número $n = k$, es decir

$$2^k > k + 20 \quad (\text{Hipótesis de inducción})$$

mostrar que la desigualdad

$$2^{k+1} > (k + 1) + 20 \quad \text{es verdadera.} \quad (4.10)$$

Esto es así pues:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2^k 2^1 && (\text{Definición de potencia}) \\ &> 2(k + 20) && (\text{Hipótesis de Inducción}) \\ &= 2k + 40 && (\text{Propiedad distributiva}) \\ &> k + 21 && (\text{por } 2k > k > 5 \text{ y } 40 > 21.) \end{aligned}$$

Es decir que hemos probado la desigualdad (4.10).

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática vale que

$$\forall n \geq 5 : 2^n > n + 20.$$

□

Los siguientes ejemplos muestran que el cumplimiento de los pasos 1 y 2 es independiente uno del otro.

Ejemplo 4.12 Dada $P(n) : n^2 - n + 41$ es un número primo.

Demuestre que $P(1)$ es una proposición verdadera, pero $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ es un condicional falso para $k = 40$.

Solución.

$P(1)$ es verdadera porque $1^2 - 1 + 41 = 41$ es un número primo.

Veamos que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, es una proposición falsa para $k = 40$.

$P(40) : 40^2 - 40 + 41 = 1601$ es verdadera por que 1601 es un número primo.

Pero $P(41) : 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, es falsa porque 41^2 no es un número primo. Luego $P(40) \Rightarrow P(41)$, no es un implicación .

Se puede verificar, con un poco de trabajo, que $P(k)$ es un también número primo para todo $2 \leq k \leq 39$.

Con los que probamos que la condición 1 es válida y no se verifica la condición 2 del principio de inducción matemática. \square

Ejemplo 4.13 Demuestre que la función proposicional

$$P(n) : 2 + 4 + \dots + 2n = n^2 + n + 2,$$

verifica el paso 2, pero no existe ningún n_0 de modo que se cumpla el paso 1.

Solución. $P(1)$ es falso, porque $2 \neq 4 = 1^2 + 1 + 2$. Veamos que no existe ningún n_0 de modo que $P(n)$ es verdadero. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + \dots + 2n &= 2(1 + 2 + \dots + n) \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{por ejemplo 4.8}) \\ &= n^2 + n \neq n^2 + n + 2. \end{aligned}$$

Probemos que :

$$P(k) \Rightarrow P(k + 1) \text{ es una implicación}$$

Para ello suponemos que la función proposicional es válida para un número $n = k$, es decir

$$2 + 4 + \dots + 2k = k^2 + k + 2 \quad \text{es válida} \tag{4.11}$$

y, bajo esta hipótesis, mostramos que la función proposicional es válida para $n = k + 1$. Es decir hay que probar que la igualdad

$$2 + 4 + \dots + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1) + 2 \quad \text{es verdadera.}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + \dots + 2k + 2(k + 1) &= k^2 + k + 2 + 2(k + 1) && \text{Reglas de inferencia} \\ &= 3k + k^2 + 4 && (\text{por (4.11)}) \\ &= (k + 1)^2 + (k + 1) + 2 && (\text{Propiedades de números}) \\ & && (\text{Desarrollo de binomio.}) \end{aligned}$$

Con los que probamos que aun no siendo válida la condición 1, se verifica la condición 2 del principio de inducción matemática. \square

4.4. Ejercicios

1. Investigar la validez de los siguientes razonamientos.
 - a) Si el sol calienta sube el termómetro, y el sol calienta, luego sube el termómetro.
 - b) Si el interés no es egoísta, entonces es la fuerza vital de las personas y es espontáneo. Observamos que el interés no es la fuerza vital de las personas y es espontáneo. Concluimos que el interés es egoísta.
 - c) Si estudio o soy un genio, entonces aprobaré el curso. Si apruebo el curso, podré tomar el siguiente curso. Por consiguiente, si no me permiten tomar el siguiente curso, entonces no soy un genio.

2. Escriba en forma simbólica los siguientes argumentos y luego proporcione una demostración formal
 - a) Si mis cálculos son correctos y pago la cuenta de electricidad, me quedará sin dinero. Si no pago la cuenta de electricidad, me cortaran la corriente. Por lo tanto, si no me he quedado sin dinero y no me han cortado la corriente, entonces mis cálculos son incorrectos.
 - b) Si estudio abogacía, entonces ganaré mucho dinero. Si estudio Geología, entonces viajaré mucho. Si gano mucho dinero o viajo mucho seré feliz. Por lo tanto si no soy feliz, no estudié abogacía ni estudié Geología.

3. Justificar los siguientes razonamientos.

$$\begin{array}{r}
 p \vee \sim q \\
 \sim q \Leftrightarrow r \\
 \hline
 p \vee (\sim r) \\
 \hline
 \therefore p
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 p \wedge q \\
 (p \wedge q) \Rightarrow r \\
 \hline
 r \Rightarrow s \\
 \hline
 \therefore s
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 p \Rightarrow q \\
 \sim (\sim p \wedge (\sim t)) \\
 t \Rightarrow s \\
 \sim r \\
 \sim r \Rightarrow (\sim q) \\
 \hline
 \therefore s
 \end{array}$$

4. Justificar la validez del razonamiento cuyas premisas son:

Hoy llueve o hace frío
 Hoy llueve o no hace frío

y conclusión: Hoy llueve.

Proponga otra conclusión del modo que el razonamiento resulte lo contrario del dado.

5. Para cada una de las siguientes proposiciones, dar una demostración formal del teorema o muestre que es falso, exhibiendo un renglón adecuado de su tabla de verdad.
 - a) Si $(r \wedge q) \Rightarrow p$ y $q \Rightarrow (\sim r)$, entonces p .
 - b) Si $q \vee \sim r$ y $\sim (r \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p)$, entonces p .
 - c) Si $p \Rightarrow (q \vee r)$, $q \Rightarrow s$ y $r \Rightarrow (\sim p)$, entonces $p \Rightarrow s$.

6. Un lógico le dijo a su hijo "Si no terminas tu cena, te iras directo a dormir y no veras televisión". Terminó su cena y fue enviado directamente a dormir. Discutir este razonamiento.
7. Para cada uno de los siguientes conjunto de hipótesis establezca una conclusión. Justifique su respuesta.
 - a) Si la televisión no se estropea entonces no estudiaré. Si estudio, aprobaré el curso. No aprobé el curso.
 - b) Si aprobé el examen parcial y el examen integrador, entonces aprobé el curso. Si aprobé el curso, entonces aprobé el examen integrador. Reprobé el curso.
8. Demostrar que si "El producto de dos número es racional, entonces los dos números son racionales"
9. Probar que la siguiente proposición es válida "El producto de un número racional distinto de cero por un irracional es un número irracional".
10. Siendo $p : a.b$ es impar y $q : a$ y b números enteros impares. Demostrar $p \Rightarrow q$.
11. Demuestre que $\sqrt{3}$ y que $\sqrt{2}$ son irracionales.
12. Expresar cada suma en términos de sumatoria:
 - a) $5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$
 - b) $-16 - 12 - 8 - 4 + 4 + 8 + 12 + 16$
 - c) $1.2 + 2.3 + \dots + n(n + 1)$
 - d) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$
13. Dada la función proposicional

$$P(n) : \sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$$

Obtener y determinar el valor de verdad de $P(1)$, $P(2)$ y $P(5)$.

14. Demostrar que si n es un entero positivo, son válidas las siguientes igualdades:

$$a) 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

$$b) \sum_{i=1}^n 7^i = \frac{7^{n+1} - 7}{6}$$

$$c) \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n + 2}{2^n}$$

$$d) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

$$e) 1.2 + 2.3 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$$

$$f) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

15. Demostrar que:

- a) La suma de los n primeros números pares es $n(n + 1)$
- b) La suma de los n primeros números impares es n^2 .
- c) $n^2 + 5n$ es un múltiplo de 2, para todo entero positivo n .
- d) Para todo entero positivo n , $n^3 - n + 3$ es un múltiplo de 3.
- e) 5 es un factor de $5^n - 1$ para todo entero positivo n .
- f) Si a es mayor que 1, entonces $a^n > 1$.
- g) Si n es par, entonces $x^n \geq 0$.
- h) Si x e y son números tales que $xy = 0$ entonces $(x + y)^n = x^n + y^n$

16. Demostrar que para $a, b \in \mathbb{R}$ la función proposicional

$$p(n) : a^n - b^n \text{ es un múltiplo de } a - b$$

es válida para todo número natural.

(Sugerencia: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) - b(a^k - b^k)$)

17. Analizar la validez de las siguientes proposiciones, para todo número natural n :

- a) $p(n) : 3 \mid 10^{n+1} + 10^n + 1$
- b) $s(n) : 2 \mid n^2 + 2n$
- c) $r(n) : 4 \mid 5^n - 1$
- d) $q(n) : 2 \mid n^2 + 5n$

Donde: La relación $a \mid b$ es equivalente a $\exists n \in \mathbb{Z} : b = a n$ y se lee: a divide a b , ó a es divisor de b ó b es múltiplo de a .

18. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $r \neq 1$.

a) Probar que para todo número natural n , vale:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (\text{Suma Geometrica})$$

b) Utilizar la suma geométrica para calcular las siguientes sumas:

- 1) $\sum_{i=1}^n 7^i$
- 2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$

19. Probar que si n es un entero mayor o igual que 2 y si z_1, z_2, \dots, z_n son números complejos, entonces vale la igualdad:

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \dots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \dots \overline{z_n}$$

¿Qué propiedad de la conjugación se deduce en caso de que sean iguales?

20. Demuestre que los ángulos interiores de un polígono convexo con n vértices suman $\pi(n - 2)$. (Descomponer los polígonos de $n + 1$ vértice en un polígonos de n vértice y un triángulo)

21. Encuentre el primer entero positivo j para el que el enunciado es válido, y demuestre usando el principio de inducción matemática que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que j .

- a) $j^2 \leq 2^j$
- b) $j^2 \geq j + 1$
- c) $4j \leq j^2 - 7$

22. Demuestre que las diagonales de un polígono convexo con n son $\frac{1}{2}n(n-3)$.
23. Considere la función proposicional $p(n) : n^2 + 5n + 1$ es par.
- Demuestre que la veracidad de $p(n)$ implica la veracidad de $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - ¿Para qué valores de n , la proposición $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$? ¿Cuál es su conclusión?
24. La función proposicional $p(n) : n(n-1) + 41$ es un número primo, es una proposición verdadera al menos cuando n es un entero positivo menor o igual que 40, ¿esto nos permite asegurar que la proposición es verdadera? Justifique usando el principio de inducción.

Capítulo 5

Conjuntos

5.1. Introducción

Georg Cantor [1845-1918] formuló de manera individual la teoría de conjuntos a finales del siglo XIX y principios del XX. Su objetivo era el de formalizar la matemática. Comenzó esta tarea por medio del análisis de las bases de la matemática y explicó todo basándose en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos). Este monumental trabajo logró unificar a la matemática y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

5.2. Notaciones y Definiciones

A fin de desarrollar ideas intuitivas consideramos un conjunto como una colección de objetos, con una determinada cualidad. Utilizaremos, generalmente, letras mayúsculas para referirnos a los conjuntos y para especificar elementos se usarán letras minúsculas, a menos que dichos elementos sean, a su vez, conjuntos.

Ejemplo 5.1 Sea H el conjunto de “todos los seres humanos”, y sea d la persona “Diego Reyes”. Es claro que d es un miembro o elemento del conjunto H . En general decimos “el elemento d pertenece al conjunto H ”. Esta proposición la simbolizamos:

$$d \in H.$$

La negación de la proposición $d \in H$ es, d no pertenece a H y se simboliza: $d \notin H$.

En general, un conjunto A se define seleccionando los elementos de un cierto conjunto de referencia. El conjunto referencial o universal depende de la disciplina en estudio; se fija de antemano, y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. En general se denotará con \mathcal{U} .

Ejemplo 5.2 El conjunto A de los números enteros menores que 2, está formado por los elementos del conjunto referencial $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ (números enteros) que satisfacen la propiedad de ser menores que 2.

Los conjuntos pueden definirse por extensión, cuando se enumeran todos los elementos que lo constituyen. O también por comprensión cuando se indica el conjunto referencial y la propiedad que caracteriza a sus elementos. Así, el conjunto A de los elementos de \mathcal{U} que verifican la propiedad P se define por comprensión $A = \{x \in \mathcal{U} / P(x)\} = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$. $P(x)$ es una función proposicional,

que señala la propiedad en cuestión y un elemento del conjunto referencial pertenece al conjunto A si y sólo si verifica la propiedad $P(x)$, es decir,

$$a \in A \Leftrightarrow P(a) \text{ es } V.$$

Por otra parte un elemento no está en A si no verifica la propiedad $P(x)$, esto es:

$$a \notin A \Leftrightarrow P(a) \text{ es } F.$$

Ejemplo 5.3 Si \mathcal{U} es el alfabeto. Dar por extensión y por comprensión el conjunto A de las vocales, y decidir si g pertenece o no a dicho conjunto.

Solución.

Por extensión

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Por comprensión

$$A = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ es una vocal}\},$$

Y $g \notin A$ ya que g no es una vocal. □

Definición 5.1 La cardinalidad de un conjunto A , que lo indicamos con $|A|$ o $\#A$, es el número o cantidad de elementos (distintos) de A .

Ejemplo 5.4 1. Si A es el conjunto de las raíces terceras de -1 , y el conjunto referencial \mathcal{U} es el conjunto de los números complejos, A se define por comprensión como

$$A = \{w \in \mathbb{C} : w^3 = -1\}$$

y la propiedad que caracteriza a los elementos de A es: $P(w) : w^3 = -1$. Ya que esta ecuación tiene 3 raíces, la cardinalidad de A es 3 y el conjunto A dado por extensión es

$$A = \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

2. Si A es el conjunto de las raíces terceras de -1 , y el conjunto referencial \mathcal{U} es el conjunto de los números reales, el conjunto A se define por comprensión como

$$A = \{w \in \mathbb{R} : w^3 = -1\}$$

Como en este caso la ecuación $w^3 = -1$ solo tiene una raíz real ($w = -1$), el conjunto A definido por extensión es $A = \{-1\}$ y la cardinalidad de A es 1.

Cuando un conjunto tiene un único elemento, o sea que su cardinalidad es uno, diremos que el conjunto es *unitario*.

Si no tiene elementos, es decir su cardinalidad es cero, diremos que el conjunto es *vacío* y en este caso lo notaremos por ϕ .

La cardinalidad, por ejemplo, del conjunto de los números naturales mayores que 2, es infinita y a veces, acudiendo a un abuso de notación, suele proponerse una aparente determinación por extensión de un conjunto infinito, con la adjunción de puntos suspensivos. Así en este caso

$$P = \{2, 4, 6, \dots\}$$

Ejemplo 5.5 Determinar la cardinalidad y expresar simbólicamente y por extensión (en caso de ser posible) los siguientes conjuntos definidos por comprensión:

1. A es el conjunto de los números reales cuyo cuadrado es igual a -1 .
2. B es el conjunto de los números naturales mayores que 2, y que no superan a 6.
3. C es el conjunto de los números reales mayores que 2, y que no superan a 6.

Solución.

1. Si A es el conjunto de los números reales cuyo cuadrado es igual a -1 . Se tiene: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\}$. Como el cuadrado de ningún número real es negativo resulta entonces $|A| = 0$ por lo tanto $A = \phi$.

2. Si B es el conjunto de los números naturales mayores que 2, que no superan a 6, la propiedad característica de los elementos de B es la conjunción de las siguientes funciones proposicionales: $P(n) : n > 2$ y $Q(n) : n \leq 6$ que podemos expresar $R(n) : 2 < n \leq 6$. Así el conjunto puede escribirse por comprensión como

$$B = \{n \in \mathbb{N} : 2 < n \leq 6\}$$

y por extensión

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

por lo que $|B| = 4$.

3. Si C es el conjunto de números reales mayores que 2 que no superan a 6 la propiedad característica de los elementos de C es igual a la del conjunto B , es decir; $R(x) : 2 < x \leq 6$, pero como el como conjunto universal es \mathbb{R} , resulta

$$C = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 6\}$$

Este conjunto es un intervalo de la recta real y por ser un conjunto no finito de elementos la determinación por extensión no es posible y hay que limitarse a la definición por comprensión. Lo denotaremos por

$$C = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 6\} = (2, 6]$$

□

Ejemplo 5.6 Caracterizar simbólicamente el siguiente conjunto: P es el conjunto de los números enteros pares.

Solución. Por definición, un entero es par si y sólo si es el duplo de algún entero. Es decir

$$a \text{ es par} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k$$

entonces

$$P = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

□

Es claro que P consiste en el conjunto de los múltiplos de 2 o lo que es lo mismo, consiste en el conjunto números enteros divisibles por 2. Esta propiedad es un caso particular de definición de la relación de divisibilidad en \mathbb{Z}

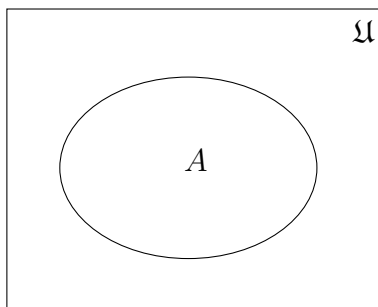
$$a | b \text{ si y sólo si } \exists n \in \mathbb{Z} : b = a n \tag{5.1}$$

Se lee: a divide a b , ó a es divisor de b ó b es múltiplo de a .

5.3. Diagrama de Venn

Los diagramas de Venn reciben el nombre de su creador, John Venn, matemático y filósofo británico. Venn introdujo este útil sistema de representación gráfica de conjuntos en el año 1880.

Existe una representación visual de los conjuntos dados por diagramas llamados de Venn. En este sentido, el conjunto referencial \mathcal{U} suele representarse por un rectángulo y los conjuntos en \mathcal{U} , por recintos cerrados en el interior del mismo. En el caso que los conjuntos en cuestión son finitos sus elementos se representan mediante puntos en el interior de los correspondientes recintos.



Ejemplo 5.7 Sean $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y los conjuntos

$$A = \{x : x|6\}$$

$$B = \{x : x|8\}$$

$$C = \{x : x \leq 2\}$$

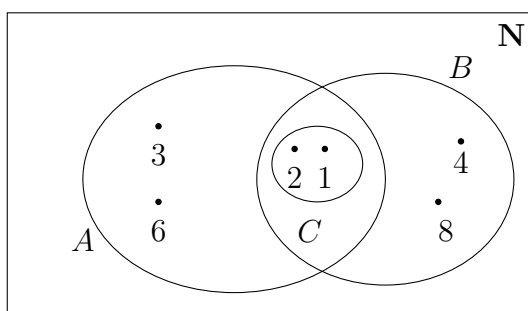
Se pide la representación de tales conjuntos mediante diagramas de Venn.

Solución.

Teniendo en cuenta (5.1) y la relación de menor o igual, la representación por extensión de tales conjuntos es

$$A = \{1, 2, 3, 6\} \quad B = \{1, 2, 4, 8\} \quad C = \{1, 2\}$$

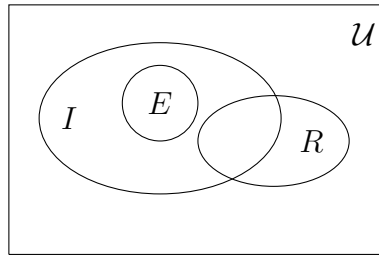
y en términos de diagramas de Venn



□

Ejemplo 5.8 Consideremos el conjunto referencial \mathcal{U} de todos los triángulos; si I denota el conjunto de los triángulos isósceles, E de los equiláteros y R de los triángulos rectángulos, verifique

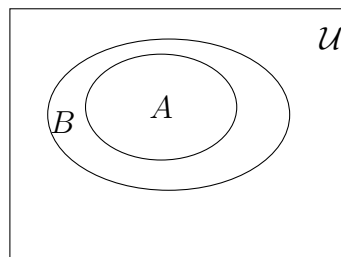
las relaciones planteadas por el siguiente diagrama:



5.4. Conjuntos y Subconjuntos

Definición 5.2 Sean A y B dos conjuntos, diremos que A está incluido en B , o que A es un subconjunto de B , si y solo si todos los elementos de A pertenecen a B , y escribimos $A \subseteq B$. Es decir:

$$A \subseteq B \text{ si } \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B. \quad (5.2)$$



Ejemplo 5.9 El conjunto de los números reales \mathbb{R} es un subconjunto de los números complejos \mathbb{C} , ya que si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x = x + 0i \in \mathbb{C}$.

Usando la definición de inclusión podemos decir que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A, \quad (5.3)$$

esto significa que para afirmar que dos conjuntos son iguales debe cumplirse que todo elemento de cualquiera de ellos pertenezca al otro. Es claro, entonces que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. La relación (5.3) nos permitirá entonces demostrar cuando dos conjuntos son iguales.

Ejemplo 5.10 Los siguientes conjuntos son iguales.

1. $M = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$ $N = \{1, 2, 3, 4\}$,

El conjunto M , está dado por comprensión en cambio el conjunto N , está dado por extensión.

2. $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 1\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| = 1\}$.

Definición 5.3 A es subconjunto propio de B cuando $A \subseteq B$ y $A \neq B$, lo denotaremos por $A \subset B$, o $A \subsetneq B$.

El siguiente lema muestra como a partir de la noción de subconjunto y usando conceptos de lógica, podemos determinar cuando un conjunto A no es subconjunto de otro conjunto B , es decir $A \not\subseteq B$.

Lema 5.1 *A no es subconjunto de B si y solo si $\exists x : [x \in A \wedge x \notin B]$.*

Demostración

Como A no es subconjunto de B, tenemos que (5.2) es falsa, por lo tanto la proposición $\sim (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$ es verdadera y usando proposiciones equivalentes obtenemos:

$$\exists x : \sim (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \text{Negación del cuantificador existencial}$$

$$\exists x : [x \in A \wedge x \notin B] \quad \text{Negación de la implicación}$$

Así tenemos que , $A \not\subseteq B$ si y solo si $\exists x : [x \in A \wedge x \notin B]$. ■

Definición 5.4 *Dos conjuntos A y B son disjuntos si y solo si $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$.*

Proposición 5.1 *Para cualquier conjunto A se verifica:*

1. $A \subseteq A$.
2. $\phi \subseteq A$.
3. ϕ es único.

Demostración.

1. Se verifica que $A \subseteq A$, ya que $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A$, es una proposición verdadera (ley lógica $p \Rightarrow p$), por lo tanto por (5.2) tenemos: $A \subseteq A$.
2. Supongamos que $\phi \not\subseteq A$ entonces por Lema 5.1, $\exists x : x \in \phi \wedge x \notin A$, pero esta proposición es falsa, pues contradice la definición del conjunto ϕ , este absurdo proviene de suponer que $\phi \not\subseteq A$, por lo tanto $\phi \subseteq A$.
3. Supongamos que existen dos conjuntos vacío: ϕ_1 y ϕ_2 , por 2. tenemos $\phi_1 \subseteq \phi_2$ y $\phi_2 \subseteq \phi_1$ entonces por (5.3) $\phi_1 = \phi_2$. ■

Dado un conjunto A, podemos formar un nuevo conjunto constituido por todos los subconjuntos de A, el cual recibe el nombre de conjunto de partes de A.

Definición 5.5 *Sea A un conjunto llamamos conjunto de partes de A, al conjunto*

$$P(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos, por lo tanto decidir si un objeto es un elemento de P(A) se reduce a determinar si dicho objeto es un subconjunto de A. Es decir:

$$X \in P(A) \quad \text{si} \quad X \subseteq A \tag{5.4}$$

Consecuencia inmediata de la proposición 1, tenemos que si A un conjunto, entonces $A \in P(A)$ y $\phi \in P(A)$.

Ejemplo 5.11 *Determinar el conjunto de partes de $A = \{2, 3, 4\}$. Los elementos de P(A) son todos los subconjuntos de A.*

Solución.

- Con 0 elementos ϕ
- Con 1 elementos $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$
- Con 2 elementos $\{2, 3\}$ $\{2, 4\}$ $\{3, 4\}$
- Con 3 elementos A

Así tenemos que:

$$P(A) = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, A\}.$$

□

Ejemplo 5.12 *El conjunto de partes del conjunto vacío, ϕ , es*

$$P(\phi) = \{\phi\}.$$

5.5. Operaciones entre conjuntos

5.5.1. Complemento de un conjunto

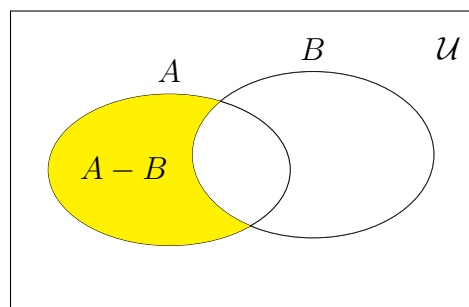
El complemento es una operación unitaria en el sentido de que, a partir de un conjunto se obtiene otro.

Definición 5.6 *Dado un conjunto A , su complemento es el conjunto formado por los elementos del universal que no pertenecen a él. Lo denotamos por A^c o \bar{A} .*

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}.$$

También podemos obtener el complemento de un conjunto B respecto de otro A , en cuyo caso la definición es:

$$C_A B = A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

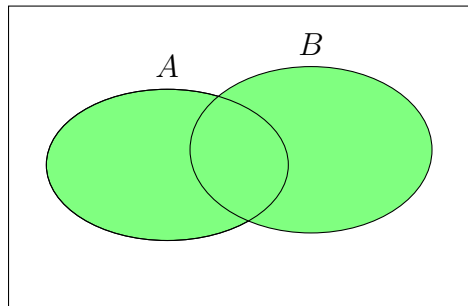


5.5.2. Unión, Intersección, Diferencia y Diferencia Simétrica

Definición 5.7 *Sean A y B dos conjuntos, definimos:*

1. La unión de A y B :

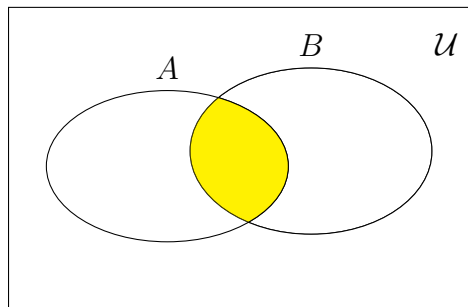
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$



2. La intersección de A y B :

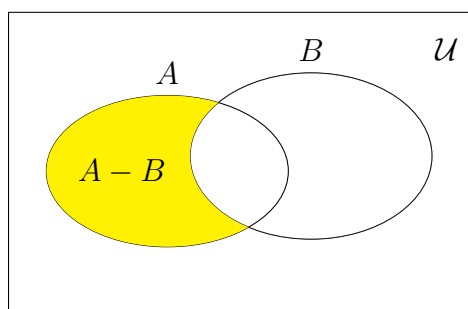
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

gra



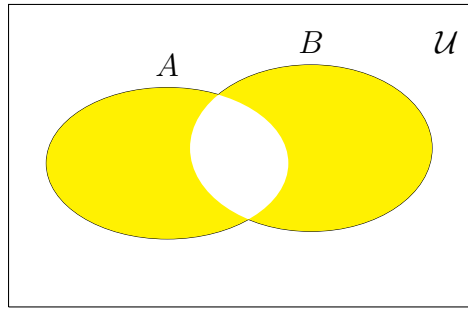
3. La diferencia de A y B :

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



4. La diferencia simétrica de A y B es

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{x / (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$$



Ejemplo 5.13 Dado el conjunto referencial $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ y los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \quad C = \{7, 8, 9\}$$

por ejemplos tenemos:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}$$

$$A \Delta B = \{1, 2, 6, 7\} = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A - B = \{1, 2\}$$

$$B - A = \{6, 7\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$A \cup C = A \Delta C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

En este ejemplo podemos observar algunas propiedades como por ejemplo : $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $A \cup C = A \Delta C$ con A y C disjuntos y que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Estas propiedades valen en general como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 5.1 Sean A y B dos conjuntos, entonces

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
2. Los conjuntos A y B son disjuntos si y sólo si $A \cup B = A \Delta B$.

Demostración.

1. Debemos probar que $A \cap B \subseteq A$ y $A \subseteq A \cup B$.

a) $A \cap B \subseteq A$

Debemos probar que $\forall x : x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$.

Sea x (arbitrario) para el cual se cumple que $x \in A \cap B$, debemos demostrar que $x \in A$.

En efecto:

$$x \in A \cap B \stackrel{(i)}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} x \in A.$$

(i) Definición de intersección de conjuntos. (ii) Ley lógica " $p \wedge q \Rightarrow p$ ".

b) $A \subseteq A \cup B$)

La demostración de esta inclusión es similar a la anterior, usando la definición unión de conjuntos y de la ley lógica “ $p \Rightarrow p \vee q$ ”. Los detalles quedan como ejercicio.

2. Debemos probar que si los conjuntos A y B son disjuntos entonces $A \cup B = A \Delta B$ y que si $A \cup B = A \Delta B$ entonces los conjuntos A y B son disjuntos.

a) Por (5.3) demostraremos que $A \cup B \subseteq A \Delta B$ y que $A \Delta B \subseteq A \cup B$ con la hipótesis de que los conjuntos A y B son disjuntos.

$A \cup B \subseteq A \Delta B$)

Sea $x \in A \cup B \stackrel{(i)}{\Rightarrow} x \in A \vee x \in B \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} x \in A \Delta B$.

(i) Por definición de unión de conjuntos.

(ii) Por hipótesis los conjuntos A y B son disjuntos, es decir $A \cap B = \phi$.

(iii) Por definición de diferencia simétrica.

$A \Delta B \subseteq A \cup B$)

Sea $x \in A \Delta B \stackrel{(i)}{\Rightarrow} (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \cap B) \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} x \in A \vee x \in B \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} x \in A \cup B$

(i) Por definición de diferencia simétrica.

(ii) Por ley lógica ($p \wedge q \Rightarrow p$).

(iii) Por definición de la unión de conjunto.

b) La demostración de esta implicación la haremos por medio del contrarrecíproco, es decir demostraremos que:

$$A \cap B \neq \phi \Rightarrow A \cup B \neq A \Delta B.$$

$A \cap B \neq \phi \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \exists y : y \in A \cap B \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} y \in A \cap B \wedge y \in A \cup B \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} y \notin A \Delta B$.

(i) Por definición de conjunto distinto de vacío.

(ii) Por parte 1.

(iii) Por definición de diferencia simétrica. ■

La siguiente tabla muestra las identidades y operaciones entre conjuntos más usadas y que dan herramientas que permiten demostrar la igualdad de conjuntos de manera distinta a la presentada anteriormente.

Dados los conjuntos A , B y C

1	Involución	$\overline{\overline{A}} = A$
2	Idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
3	Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
4	Asociatividad	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5	Distributividad	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6	Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
7	Ley de Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
8	Universo y Vacío	$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $A \cup \phi = A$ $A \cap \overline{A} = \phi$ $A \cap \mathcal{U} = A$ $A \cap \phi = \phi$

Las demostraciones de estas propiedades son consecuencias inmediatas de las definiciones de las operaciones entre conjuntos.

Ejemplo 5.14 *Mostrar que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.*

Solución.

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= (A \cup (A \cap \overline{B})) \cap (B \cup (A \cap \overline{B})) && \text{Asociatividad} \\
 &= A \cap [A \cup (B \cap \overline{B})] \cap (B \cup \overline{B}) && \text{Idempotencia y Asociatividad} \\
 &= A \cap A \cap (\mathcal{U}) && \text{Universo y Vacío} \\
 &= A \cap A && \text{Idempotencia} \\
 &= A
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.15 *Simplificar la siguiente expresión: $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$*

Solución.

$$\begin{aligned}
 \overline{(A \cup B) \cap C \cup \overline{B}} &= \overline{(A \cup B) \cap C} \cap \overline{\overline{B}} && \text{Leyes de De Morgan} \\
 &= ((A \cup B) \cap C) \cap B && \text{Involución} \\
 &= (A \cup B) \cap (C \cap B) && \text{Asociativa} \\
 &= (A \cup B) \cap (B \cap C) && \text{Conmutativa} \\
 &= [(A \cup B) \cap B] \cap C && \text{Asociativa} \\
 &= B \cap C && \text{Absorción,}
 \end{aligned}$$

□

5.5.3. Conjunto de Partes. Binomio de Newton

Dado un conjunto A con n elementos, ¿Cuántos subconjuntos de A , con r elementos ($r = 1, 2, \dots, n$) podemos formar? ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $P(A)$? Para esto definimos el número combinatorio y binomio de Newton.

Definición 5.8 Sean r y n enteros no negativos y supongamos que $r \leq n$ definimos el número combinatorio “ n tomado de r ” por:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

con $n! = 1.2.3 \dots (n-1)n$ y $0! = 1$

Ejemplo 5.16 $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10.$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

Para un conjunto S de cardinalidad n el número de subconjuntos de cardinalidad r se obtiene por medio de $\binom{n}{r}$.

Ejemplo 5.17 Sea $A = \{2, 3, 4\}$, ¿cuántos subconjuntos de A con r elementos hay para $r = 0, 1, 2, 3$?

Para $r = 0$, el único subconjunto de cardinalidad cero es el vacío y $\binom{3}{0} = 1.$

Para $r = 1$, los subconjuntos unitarios de A son : $\{2\}, \{3\}, \{4\}$ y $\binom{3}{1} = 3.$

Para $r = 2$, los subconjuntos de cardinalidad 2 de A son : $\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}$ y $\binom{3}{2} = 3.$

Para $r = 3$, el único subconjunto de cardinalidad 3 de A es: $\{2, 3, 4\}$ y $\binom{3}{3} = 1.$

Algunas propiedades del numero combinatorio son:

- Si $0 \leq k \leq n$, entonces $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

En forma similar podemos desarrollar $(a + b)^2$ y nos dará el trinomio cuadrado perfecto. El Binomio de Newton nos permite desarrollar para cualquier n , $(a + b)^n$.

Un caso particular del Binomio de Newton es cuando $a = b = 1$, en este caso nos queda:

$$(1 + 1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} 1^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r},$$

es decir que

$$2^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$$

Como el número combinatorio $\binom{n}{r}$ nos da el número de subconjuntos de cardinalidad r que se pueden formar de un conjunto A de cardinalidad n , tenemos que 2^n es la cantidad total de subconjuntos que se pueden formar de A . Este razonamiento es una demostración del siguiente resultado:

Proposición 5.2 *Para todo conjunto $A \in U$, tal que $|A| = n$ entonces $|P(A)| = 2^n$.*

5.5.4. Producto Cartesiano

Dados dos elementos a y b , nos interesa formar un conjunto que dependa no solo de los elementos, sino también del orden en que se los considere.

Definición 5.9 *Par ordenado (a, b) es el conjunto cuyos elementos son $\{a\}$ y $\{a, b\}$, es decir*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

donde a es la primer componente del par ordenado y b la segunda.

Para el caso particular (a, a) tenemos que:

$$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$$

y si $a \neq b$ claramente entonces $(a, b) \neq (b, a)$

Definición 5.10 *Dados dos conjuntos A y B definimos el producto cartesiano como el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados cuya primer componente pertenece a A y la segunda a B .*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

En el caso $A \times A = A^2 = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in A\}$. Si A es el conjunto de los números reales \mathbb{R} tenemos $R \times R = R^2$, por lo que, los elementos del producto cartesiano de dos sub conjuntos de números reales pueden representarse gráficamente en un plano coordenado donde la abscisa es el primer componente y la ordenada al origen la segunda.

Ejemplo 5.19 *Para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$ el producto cartesiano es*

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

5.6. Ejercicios

1. Enumerar los elementos de los siguientes conjuntos:

- a) $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, 4\}$
- b) $\{n^2 - n : n = 0, 1, 2, 3, 4\}$
- c) $\{2 + (i)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Encuentra, en caso de ser posible cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $\{n \in \mathbb{N} / n \text{ es divisible por } 5\}$
- b) $\{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}^+\}$
- c) $\{i^n / n \in \mathbb{N}\}$
- d) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

3. Determinar si los siguientes conjuntos son o no vacíos. En caso de no serlo, expresarlos por extensión.

- a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 9\}$
- b) $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9\}$
- c) $\{n \in \mathbb{C} : n^2 = 9\}$
- d) $\{n \in \mathbb{N} : 3 < n < 7\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}$
- f) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge x \geq 2\}$.

4. Dar la cardinalidad de los siguientes conjuntos.

- a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 2\}$
- b) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 < n \leq 73\}$
- c) $\{x \in \mathbb{Q} : n^2 = 2\}$
- d) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$
- e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}$

5. Considerar los conjuntos

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z = i^k \wedge k \in \mathbb{N}\} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = -1\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad D = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 3\}$$

Decidir cuál es subconjunto de cuál. Analizar todas las posibilidades.

6. Dados los conjuntos $\{0, 1\}$, $(0, 1)$ y $[0, 1]$. Enunciar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

- a) $\{0, 1\} \subset (0, 1)$
- b) $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$

- c) $(0, 1) \subseteq \{0, 1\}$
 d) $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$
 e) $\frac{1}{2}$ y $\frac{\pi}{4}$ están en $\{0, 1\}$
 f) $\frac{1}{2}$ y $\frac{\pi}{4}$ están en $[0, 1]$.

7. Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$ y $D = \{2, 4, 8\}$. Determinar los conjuntos y representar en un diagrama de Venn:

- a) $A \cup B$
 b) $A \cap C$
 c) $(A \cup B) \cap C^c$
 d) $A - B$
 e) $C - D$
 f) $B \Delta D$.

8. Considerar los siguientes conjuntos, donde el referencial (o universal) es el conjunto de los números complejos.

$$\begin{aligned} A &= \{z : z = i^k \wedge k \in \mathbb{N}\} & B &= \{z : z^2 = -1\} \\ C &= \{z / z^8 = 1\} & D &= \{z : |z| = 1\} \\ E &= \{a + bi : |a| = 1 \wedge b \in \mathbb{R}\} & F &= \{a + bi : a \leq b\} \end{aligned}$$

Representar cada conjunto en el plano complejo.

9. Para los conjuntos dados en el ejercicio anterior, obtener los siguientes conjuntos y representarlos:

- a) $D \cup E$ b) $B \cup C$
 c) $B \cap F$ d) $A \cap D$
 e) F^c f) D^c
 g) $C - B$ h) $C - D$
 i) $A \Delta E$ j) $A \Delta C$

10. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos, teniendo en cuenta que el referencial es \mathbb{R} ,

- a) $[0, 3] \cap [2, 6]$
 b) $[0, 3] \cup [2, 6]$
 c) $[0, 3] \Delta [2, 6]$
 d) $[0, 3]^c$
 e) $[0, 3] \cap \emptyset$

11. Las afirmaciones siguientes utilizan subconjuntos de algún conjunto universal no vacío \mathcal{U} . Decir cuáles son verdaderas y cuáles falsas. Para las falsas, proporcionar un ejemplo en el que la afirmación no se cumpla.

- a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ para todo A, B, C
- b) $A \cup B \subseteq A \cap B$ implica $A = B$
- c) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$ para todo A, B
- d) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ siempre que $A \subseteq B$
- e) $A \cap B = A^c \cup B^c$ para todo A, B .
- f) $C_B A = B - A$ para todo A, B .

12. Demostrar lo siguiente sin utilizar diagrama de Venn.

- a) $A \cap B \subseteq A$ y $A \subseteq A \cup B$ para todos los conjuntos A, B
- b) Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq B \cap C$
- c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$
- d) $A \subseteq B$ si y solo si $B^c \subseteq A^c$.
- e) Si $B \subseteq A$ si y solo si $(A - B) \cup B = A$
- f) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

13. Probar o refutar, tener en cuenta que una demostración requiere un argumento general, pero para refutar basta un contraejemplo.

- a) $A \cap B = A \cap C$ implica $B = C$
- b) $A \cup B = A \cup C$ implica $B = C$
- c) $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$ implica $B = C$
- d) $A \cup B \subseteq A \cap B$ implica $A = B$
- e) $A \Delta B = A \Delta C$ implica $B = C$.

14. Demostrar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

$$A \subseteq B; \quad B^c \subseteq A^c; \quad A \cup B = B \quad \text{y} \quad A \cap B = A$$

15. Demostrar

- a) $A \cap B = \phi \wedge A \cup B = \mathcal{U} \Rightarrow B = A^c$
- b) $A \cap B = \phi \wedge A \cup B = C \Rightarrow A = C - B$.

16. Calcular:

- a) $\binom{8}{3}$ b) $\binom{8}{0}$
- c) $\binom{8}{5}$ d) $\binom{52}{50}$
- e) $\binom{71}{71}$ f) $\binom{42}{1}$

17. Demostrar :

$$a) \text{ Si } 0 \leq k \leq n, \text{ entonces } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$b) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$c) \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

18. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

a) Determinar la cardinalidad de los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \Delta B$.

b) Cuántos subconjuntos tiene A .

c) Cuántos subconjuntos tiene A con 4 elementos.

19. En un grupo de 150 personas, 45 nadan, 40 andan en bicicleta y 50 corren. Asimismo, 32 personas corren pero no andan en bicicleta, 27 personas corren y nadan y 10 practican los 3 deportes. Cuántas personas corren pero no nadan ni andan en bicicleta?. Si 21 personas andan en bicicleta y nadan, cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

20. Un grupo de personas decide viajar y resulta que 40 mujeres van al exterior, 37 hombres van a provincias, 28 casados van al extranjero y 45 solteros van a las provincias. Si se sabe que hay 42 hombres casados y que 18 mujeres solteras que viajan al exterior, entonces el número de mujeres solteras es: a) 60, b) 62, c) 64, y d) 68. Utilizar diagramas de Venn para identificar la respuesta correcta.

21. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3, 4\}$, obtener:

$$a) A \times (B \cup C)$$

$$b) (A \cup B) \times (A \cup C)$$

$$c) (A \times (B \cap C))$$

$$d) (A \cap B) \times (A \cap C).$$

22. Sean $S = \{a, b\}$, $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $V = \{3, 5, 7, 9\}$.

Hallar $(S \times W) \cap (S \times V)$ y $S \times (W \cap V)$.

23. Probar que $(A \times C) \cap (B \times C) = A \cap B \times C$.

24. Probar que, si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ entonces $(A \times C) \subseteq (B \times D)$.

25. Demostrar que, si $(A \times C = \phi) \Rightarrow (A = \phi \vee C = \phi)$.

26. Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un conjunto finito de conjuntos, definimos

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

probar que

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c \quad \text{y} \quad \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c.$$

Capítulo 6

Vectores

6.1. Introducción

En este capítulo estudiamos a los vector, los cuales son una herramienta fundamental tanto para la Física como para la matemática. La historia de los vectores se remonta al año 1843, cuando el matemático William Hamilton descubrió un nuevo sistema de números, los cuaternios, que venía a extender el sistema de los números complejos plano complejo a las tres dimensiones a través de los cuaterniones. Así como todo número complejo es de la forma $a + bi$, siendo a y b números reales e i un nuevo objeto tal que $i^2 = -1$, un cuaternio es una expresión de la forma

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

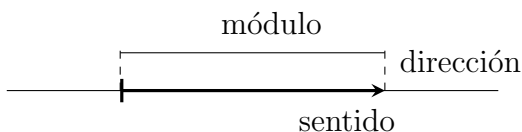
donde a, b, c, d son números reales e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son nuevos objetos que satisfacen ciertas reglas bien definidas.

Los cuaternios encontraron pronto aplicaciones físicas interesantes, pero no resultaban fáciles de manejar. Los físicos Gibbs y Heaviside a fines de siglo XIX decidieron facilitar la aplicación de los cuaternios de Hamilton tomando de ellos solamente la parte no real, $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Resultaba así un objeto matemático que Gibbs lo llamó vector.

6.2. Enfoque geométrico

6.2.1. Definiciones y Notación

Comenzaremos el estudio de los vectores en forma geométrica, los cuales son segmentos caracterizados por su longitud (o módulo), dirección y sentido (u orientación). Los vectores pueden entonces utilizarse para representar ciertas magnitudes físicas que además de un valor numérico, requieren describir una dirección y un sentido. Un vector (en el plano o en el espacio tridimensional) será representado por un segmento de recta dirigido o una flecha.

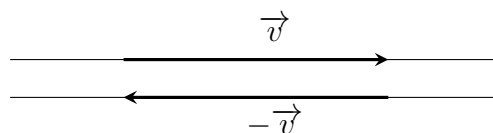


Cada vector queda identificado por tres características fundamentales: módulo, dirección y sentido. El módulo de un vector es la longitud del segmento que lo representa. La dirección de

es la recta a la cual pertenece o cualquier recta paralela a ésta. El sentido es la orientación del segmento que lo representa.

Usaremos \overrightarrow{AB} para denotar el vector con punto inicial A y punto final B y con \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} o \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} los vectores cuyos puntos extremos no están especificados, a los que denominaremos vectores libres. $|\vec{v}|$ indica el módulo del vector \vec{v} . $\vec{0}$ denota al vector nulo, es decir, el vector con módulo cero.

Dos vectores libres son iguales cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Si dos vectores tienen la misma dirección el mismo módulo pero sentido opuesto decimos que son vectores opuestos.



6.2.2. Operaciones con vectores

Multiplicación por escalares:

Dado un vector \vec{v} y un número real (escalar) λ , se obtiene otro vector

$$\lambda \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

con la misma dirección que \vec{v} (colineales). Si $\lambda > 0$, tiene el mismo sentido, pero si $\lambda < 0$ el sentido será opuesto. El módulo es

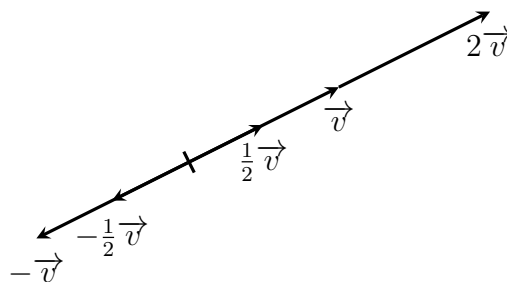
$$|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}|,$$

donde $|\lambda|$ es el valor absoluto del número real λ .

Así, el opuesto de un vector \vec{v} es $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.

Ejemplo 6.1 Si un coche se desplaza a 25 km/h y otro a 50 km/h, en la misma carretera, el vector que representa al segundo tendrá un módulo igual al doble que la del primero.

Ejemplo 6.2 Dado el vector \vec{v} , obtener gráficamente: $2\vec{v}$, $-\vec{v}$, $\frac{3}{2}\vec{v}$, $-\frac{3}{2}\vec{v}$

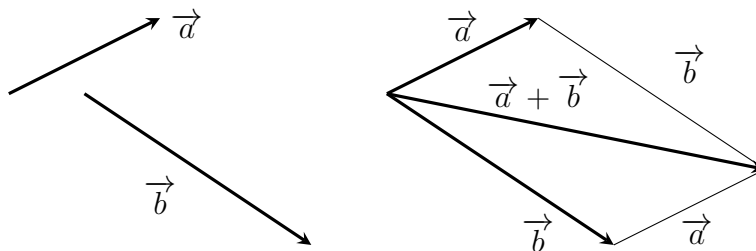


Suma de vectores en forma geométrica:

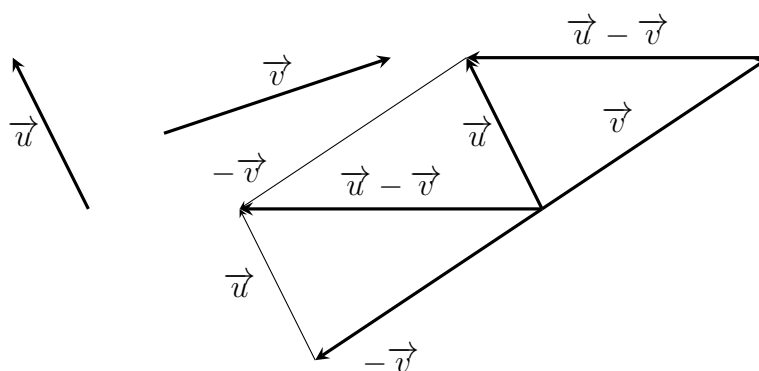
Para realizar la suma gráfica de dos vectores, utilizamos el “método del paralelogramo” o el “método del polígono”.

Método de paralelogramo: Se trasladan los dos vectores de tal forma que se unan en su origen. Luego se dibuja un paralelogramo que tiene a ambos vectores como lados adyacentes. La diagonal es la dirección del vector suma y el origen coincide con el origen de los dos vectores.

Método del polígono: Se colocan los vectores uno seguido del otro, sin importar el orden. El vector resultante tiene como origen el punto de partida del primero y como extremo el extremo del último vector.



Para restar un vector \vec{v} de un vector \vec{u} simplemente se suma \vec{u} con el opuesto a \vec{v} , es decir, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v}$.



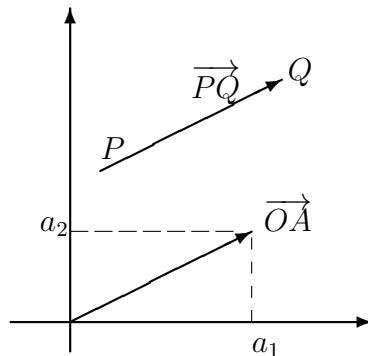
Si deseamos trabajar con vectores no podemos conformarnos con una representación gráfica de ellos, necesitamos poder expresarlos de forma numérica, tanto para poder operar más cómodamente como para poder estudiarlos desde un punto de vista algebraico.

6.3. Enfoque Algebraico

Los problemas con vectores se pueden simplificar introduciendo un sistema de coordenadas rectangulares.

Para un vector cualquiera \vec{PQ} existe un único vector \vec{OA} , igual al vector \vec{PQ} , con punto inicial en el origen de coordenadas O y punto final el punto A . En este sentido, cada vector determina una única $n - upla$ de números reales que son las coordenadas (a_1, \dots, a_n) del punto A . De igual modo, toda $n - upla$ de números reales (a_1, \dots, a_n) determina el vector \vec{OA} . Por ello a cada vector le vamos asociar un $n - upla$ de números (a_1, \dots, a_n) que denominaremos componentes del vector \vec{v} y lo notaremos como un vector columna o vector fila:

$$\vec{PQ} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ o } \vec{PQ} = \vec{OA} = (a_1, \dots, a_n).$$



Con lo antes definido podemos operar con los vectores desde el punto de vista algebraico.

Proposición 6.1 Sea $\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\vec{w} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ entonces

1. $\vec{v} = \vec{w}$ si y solo si $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si y solo si para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $a_i = b_i$.
2. $\vec{v} + \vec{w} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.
3. $\lambda \vec{v} = \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

Ejemplo 6.3 Dado los vectores $\vec{x}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{x}_2 = (-2, 1, 1)$ y $\vec{x}_3 = (0, 3, 1)$
 Calcular: $\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2$ y $\vec{x}_1 - \vec{x}_3$.

Solución

$$\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 = (1, 0, 2) + 2(-2, 1, 1) = (1, 0, 2) + (-4, 2, 2) = (-3, 2, 4)$$

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_3 = (1, 0, 2) - (0, 3, 1) = (1, -3, 1). \quad \square$$

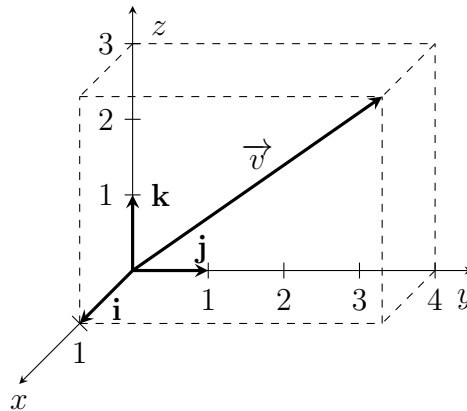
Un vector es linealmente dependiente de otros cuando se puede poner como combinación lineal de ellos. Cuando en un conjunto de vectores uno de ellos depende linealmente de los otros diremos que es un conjunto de vectores linealmente dependientes. En caso contrario, es decir, cuando ninguno de los vectores se puede poner como combinación lineal de los demás, es un conjunto de vectores linealmente independientes.

El conjunto de vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, con $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$, tienen la particularidad de que ninguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás (linealmente independientes) y nos permiten representar cualquier vector \vec{v} de forma única, como combinación lineal de ellos; así,

$$\vec{v} = (a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i$$

por ello se la denomina base estándar o canónica de \mathbb{R}^n y a los vectores se los llama también versores.

Para denotar los versores también se suele usar como notación $\mathbf{i} = \vec{e}_1$, $\mathbf{j} = \vec{e}_2$ y $\mathbf{k} = \vec{e}_3$. Así si $\vec{r} = (1, 4, 3)$ puede escribirse como $\vec{r} = 1\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ o $\vec{r} = (1, 4, 3)$.



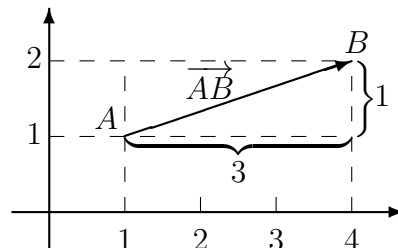
Vector con punto inicial A y punto final B

Dado los puntos $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, el vector \vec{AB} se obtiene haciendo la diferencia del vector \vec{OB} menos el vector \vec{OA}

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) - (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \dots, \beta_n - \alpha_n)$$

Ejemplo 6.4 En \mathbb{R}^2 , dados los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (4, 2)$, el vector con origen en A y extremo en B, \vec{AB} tiene componentes

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (4, 2) - (1, 1) = (3, 1)$$

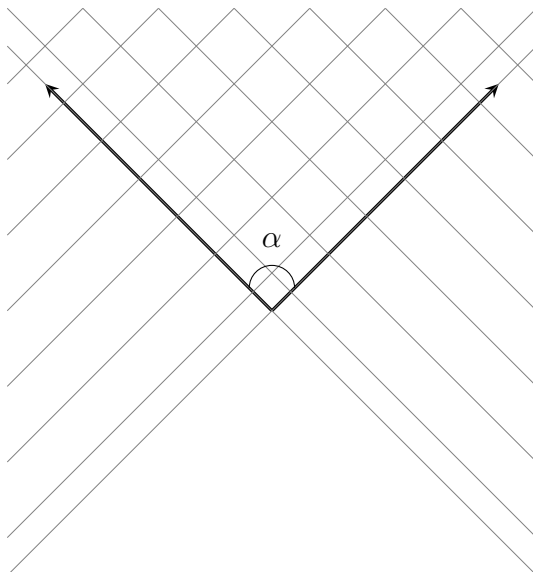


□

6.4. Ángulo entre dos vectores

Los vectores pertenecen a una recta que determina su dirección. Estas rectas, a su vez, dividen al plano en dos; cada una de “esas partes” constituye un semiplano. Si tenemos dos vectores que no son colineales, cada una de las rectas determina un semiplano (uno por cada recta); la intersección

de ambos semiplanos determina el ángulo que se encuentra entre ambos.



El valor del ángulo está acotado entre los valores 0 y π . Si el ángulo es de $\frac{\pi}{2}$ los vectores son perpendiculares u ortogonales y usamos el símbolo \perp , y hecho de ser ortogonales implica que son linealmente independientes.

6.4.1. Vectores en \mathbb{R}^2 en términos de su módulo, dirección y sentido

Muchas aplicaciones describen a los vectores en términos de su módulo, dirección y sentido, y no en términos de sus componentes. Un vector en el plano puede ser expresado por su módulo y el ángulo que forma con el eje positivo x , notemos que el ángulo nos dice cual es la dirección y el sentido. Por ejemplo, si el ángulo que forma un vector con el eje positivo es de $\frac{\pi}{3}$ y otro es de $\frac{4\pi}{3}$ ambos vectores difieren en π , están en la misma dirección pero tienen sentido opuesto.

Dado un vector \vec{v} no nulo y el ángulo α entre \vec{v} y el semieje x positivo, para expresar \vec{v} en términos de $|\vec{v}|$ y α , determinamos el vector unitario \vec{u} en la dirección de \vec{v} :

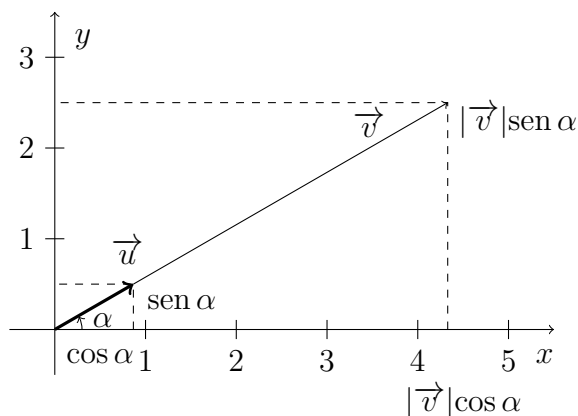
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ entonces } \vec{v} = |\vec{v}| \vec{u}$$

Observamos (ver figura) que las coordenadas del punto final de \vec{u} son $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, de modo que

$$\vec{u} = \cos \alpha \mathbf{i} + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j}$$

y

$$\vec{v} = |\vec{v}| (\cos \alpha \mathbf{i} + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j}) \tag{6.1}$$



Ejemplo 6.5 Una fuerza de 5 libras se aplica en una dirección que forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el eje x positivo. Expresar \vec{F} en términos de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

Solución.

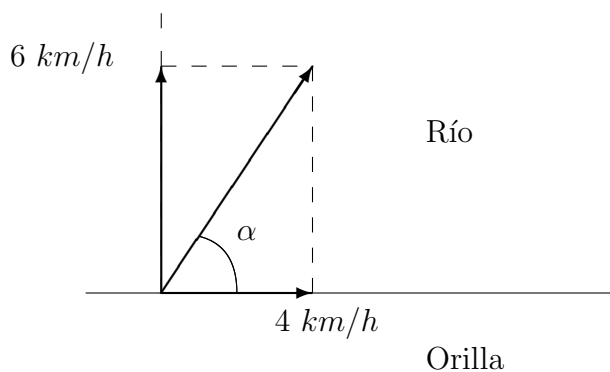
El módulo de la fuerza \vec{F} es $|\vec{F}| = 5$, y forma un ángulo con el eje x positivo de $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Así por (6.1) tenemos,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= |\vec{F}| (\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{6} \mathbf{j} \right) \\ &= 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} \right) = \frac{5}{2} \sqrt{3} \mathbf{i} + \frac{5}{2} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.6 Un nadador quiere atravesar un río. Nada a una velocidad de 6km/h, en dirección perpendicular a la orilla, pero la corriente lo desplaza con un velocidad de 4km/h. Representar gráficamente la velocidad del nadador, determinar el módulo y el ángulo que forma con la orilla el vector resultante del desplazamiento del nadador.

Solución.



Aplicando Pitágoras el modulo del vector \vec{v} , resultante es $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$,

Ejemplo 6.7 y como $\tan \alpha = \frac{6}{4}$ entonces $\alpha = \arctan \frac{3}{2} = \frac{14}{45}\pi$.

□

6.5. Producto escalar (o interno)

Definición 6.1 Dado dos vectores \vec{u} y \vec{v} llamaremos producto escalar de \vec{u} y \vec{v} al número real determinado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Siendo θ el ángulo entre ambos vectores.

Propiedades

Dados los vectores \vec{v} , \vec{u} y \vec{w} y los escalares α , $\beta \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades.

P1) $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

P2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

P3) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

P4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

P5) Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero. Y si el producto escalar de dos vectores es cero, ó bien uno de los vectores es el vector $\vec{0}$, ó ambos vectores son perpendiculares.

Las propiedades P1), P2), P3), son consecuencia inmediata de la definición de producto escalar. La Propiedad P4), no la demostraremos en este curso.

Probaremos la propiedad P5):

1.- Sean \vec{v} y \vec{u} vectores perpendiculares, entonces el ángulo entre ambos vectores es $\theta = \frac{\pi}{2}$ luego $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{u}| |\vec{v}| 0 = 0$.

2.- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = 0$ entonces, o bien $|\vec{u}| = 0$ ó $|\vec{v}| = 0$; ó $\cos \theta = 0$ por lo tanto $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$; ó ambos vectores son perpendiculares. ■

Proposición 6.2 Si las coordenadas de dos vectores \vec{u} y \vec{v} , son $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ el producto escalar entre ambos puede hallarse mediante la sumatoria del producto de cada una de sus coordenadas.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Esta proposición suele ser dada como definición de producto escalar cuando el sistema de referencia es ortonormal

Demostración. Sin perder generalidad trabajaremos con vectores en el plano.

Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base estándar o canónica de \mathbb{R}^2 , tal que $\vec{u} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ y $\vec{v} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$. Así tenemos

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \stackrel{\text{por P3)}}{=} \\ &= (a_1 \vec{e}_1) \cdot (b_1 \vec{e}_1) + (a_1 \vec{e}_1) \cdot (b_2 \vec{e}_2) + (a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1) + (a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_2 \vec{e}_2) \stackrel{\text{por P2)}}{=} \\ &= a_1 b_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + a_1 b_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + a_2 b_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + a_2 b_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2). \end{aligned}$$

Ahora, como la base es ortonormal tenemos

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 &= |\vec{e}_1|^2 = 1; & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 &= |\vec{e}_2|^2 = 1 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

De esta proposición se obtiene

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Ejemplo 6.8 Probar que los vectores $(3, 2)$ y $(-4, 6)$ son ortogonales en \mathbb{R}^2 .

Utilizando la proposición 6.2, $(3, 2) \cdot (-4, 6) = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 = 0$

Luego, por la propiedad P5), los vectores son ortogonales.

Ejemplo 6.9 Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, donde $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (1, 4)$.

Calcular:

1. Su producto escalar.
2. El módulo de cada vector.
3. El ángulo que forman
4. Hallar el valor de x , de modo tal que $\vec{w} = (x, 1)$ sea unitario y ortogonal a \vec{u} .

Solución.

1. Por la proposición 6.2

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 = -10$$

$$2. |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}.$$

3. Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ entonces $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$, reemplazando tenemos que

$$\cos \theta = \frac{-10}{\sqrt{13}\sqrt{17}} \text{ luego } \theta \sim \frac{45}{33}\pi.$$

4. Como el vector \vec{w} debe ser ortogonal a \vec{u} y además unitario, debe cumplir

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = u_1 w_1 + u_2 w_2 = 0 \quad (1)$$

y

$$|\vec{w}| = 1 \quad (2)$$

De (1) obtenemos un el vector $(\frac{3}{2}, 1)$ que es ortogonal a \vec{u} no unitario, el que al dividirlo por su módulo nos da el vector buscado, así obtenemos que $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 1^2}} (\frac{3}{2}, 1) = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$.

□

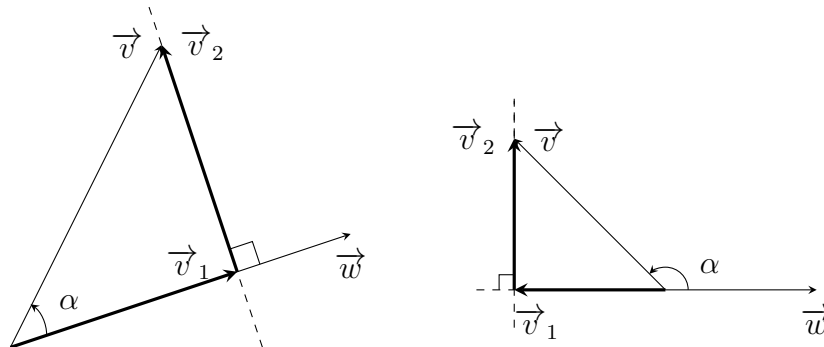
6.5.1. Proyección de un vector sobre otro

Sean \vec{v} y \vec{w} dos vectores no nulos, considerados en un mismo origen, se desea descomponer \vec{v} en dos vectores: \vec{v}_1 , en la misma dirección que \vec{w} y \vec{v}_2 en la dirección perpendicular u ortogonal a \vec{w} . El vector \vec{v}_1 es la proyección vectorial de \vec{v} sobre \vec{w} y se denota $proj_{\vec{w}} \vec{v}$.

Construcción del vector \vec{v}_1 y \vec{v}_2 :

Dibujamos ambos vectores en un origen común.

Trazamos una recta perpendicular a la dirección del vector \vec{w} , que contenga a el punto final de \vec{v} , hasta cortar la recta que contiene a \vec{w} . Esta intersección es el punto final del vector \vec{v}_1 y el origen es el origen de \vec{v} . El vector \vec{v}_2 esta dado por $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$.



Observamos que, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, y \vec{v}_2 ortogonal a \vec{w} , $\vec{v}_2 \cdot \vec{w} = 0$, por lo tanto tenemos

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w} + \vec{v}_2 \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w} \quad (6.2)$$

También se cumple que \vec{v}_1 paralelo a \vec{w} , es decir que $\vec{v}_1 = \lambda \vec{w}$ para algún escalar λ . Reemplazando en la ecuación (6.2):

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \lambda \vec{w} \cdot \vec{w} = \lambda |\vec{w}|^2$$

despejando λ

$$\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}.$$

Entonces tenemos que \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son:

$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{w} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \vec{w} \quad (6.3)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \vec{w}$$

Al vector \vec{v}_1 se lo denomina la *proyección* de \vec{v} sobre \vec{w} ,

$$\vec{v}_1 = proj_{\vec{w}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \vec{w}$$

Ejemplo 6.10 Determinar la proyección vectorial de $\vec{v} = (1, 3)$ sobre $\vec{w} = (1, 1)$

Solución.

Por la formula (6.3) .

$$\vec{v}_1 = \text{proy}_{\vec{w}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \vec{w} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{(\sqrt{2})^2} \vec{w} = 2\vec{w} = (2, 2)$$

□

6.6. Producto vectorial de vectores en \mathbb{R}^3

El producto cruz o vectorial se define para vectores en \mathbb{R}^3 , y el resultado es un vector de \mathbb{R}^3 . También tiene otras propiedades, entre ellas es que el vector resultante es ortogonal o perpendicular a los primeros.

Definición 6.2 El producto vectorial de $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ es

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Usando determinantes, esta definición se puede escribir como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Nota: A los fines de hacer sencillo el calculo anterior es práctico tener presente la siguiente regla nemotécnica:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Ejemplo 6.11 Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ para $\vec{u} = (1, -2, -1)$ y $\vec{v} = (-2, 4, 1)$.

Solución.

Tenemos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

y

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

por lo tanto $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v} \times \vec{u} = (-2, -1, 0)$ □

En el ejemplo anterior se puede observar que le producto vectorial de dos vectores no es conmutativo. En general se puede demostrar que el producto vectorial es antisimétrico, es decir:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}).$$

Ejemplo 6.12 Sean \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} los versores de \mathbb{R}^3 tenemos que

$$\begin{matrix} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{matrix}$$

6.6.1. Propiedades

Teorema 6.1 Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de \mathbb{R}^3 y θ el ángulo entre ellos. Entonces:

P1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

P2) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$, es decir, $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular tanto a \vec{u} como a \vec{v} .

P3) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, esta igualdad se conoce como igualdad de Lagrange.

P4) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$ donde θ es el ángulo entre los dos vectores.

P5) Los vectores son paralelos si y sólo si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

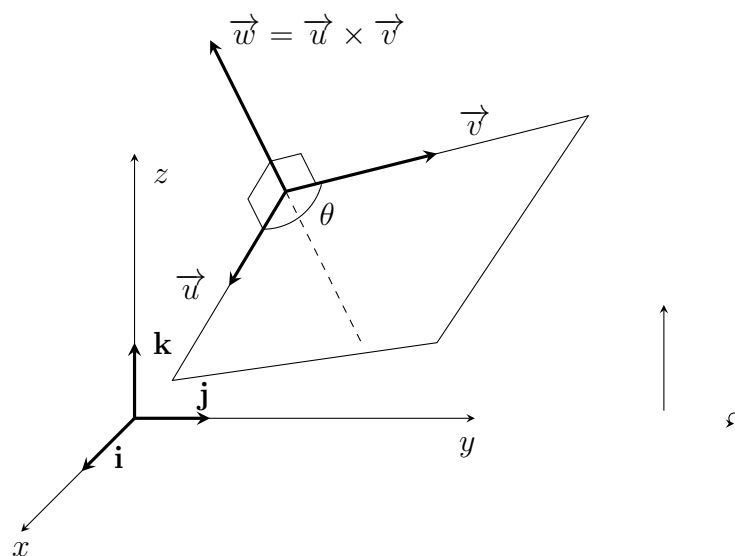
Demostración.

P1) Usamos la definición de $\vec{u} \times \vec{v}$ y las propiedades de determinante,

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= -\mathbf{i} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} - \mathbf{k} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= -(\vec{v} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

P2) Por definición de producto vectorial y escalar

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$



P3) Aplicando la definición de producto vectorial, producto escalar, módulo y operando se obtiene esta igualdad. Se deja los detalles para el alumno.

P4) De la igualdad anterior

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &\stackrel{(P3)}{=} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta)^2 \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

P5) En primer lugar demostraremos que los vectores son paralelos sólo si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Tenemos que dos vectores son paralelos cuando el ángulo entre ellos es 0 o π luego (por la propiedad P4), $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ por lo tanto el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es nulo.

En el otro sentido demostraremos que, los vectores son paralelos si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, entonces $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ y usando la propiedad P3) tenemos

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \theta = 0,$$

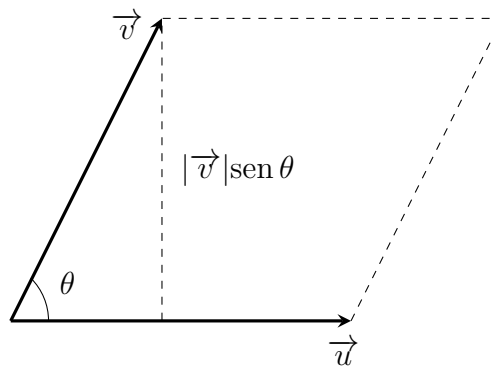
Si $|\vec{u}| = 0$, el vector $\vec{u} = \vec{0}$, por lo tanto será paralelo al vector \vec{v} , lo mismo ocurre si $|\vec{v}| = 0$.

Si $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$ entonces $\sin^2 \theta = 0$, por lo tanto $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, es decir que \vec{u} y \vec{v} son paralelos. ■

Las demostraciones de la siguiente Proposición se deja como ejercicio.

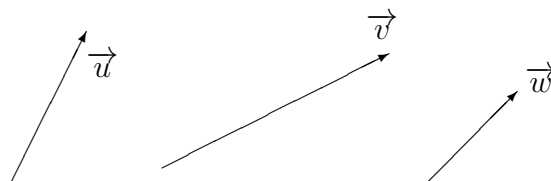
Proposición 6.3 Si \vec{u}, \vec{v} y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$.
2. $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda\vec{v}$.
3. Si u y v son los lados adyacentes de un paralelogramo, entonces el área de un paralelogramo es $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$.



6.7. Ejercicios

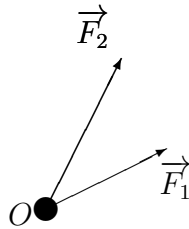
1. Para los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} dados



Obtener gráficamente cada una de las siguientes operaciones:

- a) $3\vec{v}$ d) $\vec{v} + \vec{w}$ g) $3\vec{v} - 2\vec{w}$
 b) $\frac{2}{3}\vec{u}$ e) $\vec{u} - \vec{v}$ h) $\frac{2}{3}\vec{u} - 2\vec{w}$
 c) $-2\vec{w}$ f) $\vec{v} - \vec{u}$ i) $2\vec{w} + \vec{v} - \vec{u}$

2. La figura muestra dos fuerzas F_1 y F_2 actuando sobre un objeto O . Determinar la fuerza resultante, $R = F_1 + F_2$.



3. Si el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tiene como punto inicial P y punto final Q , determinar su vector posición y expresar el vector \vec{v} de la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Graficar:

- a) $P = (0, 0); Q = (3, 4)$ d) $P = (-3, 2); Q = (6, 5)$
 b) $P = (0, 0); Q = (-3, -5)$ e) $P = (-1, 4); Q = (4, 2)$
 c) $P = (3, 2); Q = (5, 6)$ f) $P = (1, 0); Q = (0, 1)$

4. Si $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1)$ y $\vec{w} = (-2, 0)$, calcular analíticamente las operaciones indicadas en el ejercicio 1).

5. Para los vectores obtenidos en el ejercicio 3) determinar el ángulo que forma cada uno de ellos, con el eje positivo x .

6. Graficar el vector \vec{v} y determinar $|\vec{v}|$ en cada uno de los siguientes casos:

- a) $\vec{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ d) $\vec{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$
 b) $\vec{v} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ e) $\vec{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
 c) $\vec{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ f) $\vec{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

7. Obtener un vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{v} , para cada uno de los casos del ejercicio anterior.

8. Si el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tiene como punto inicial P y punto final Q , determinar su vector posición y expresar el vector \vec{v} de la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Graficar

- a) $P = (0, 0, 0); Q = (1, 3, 4)$ d) $P = (-3, 2, 0); Q = (6, 1, 5)$
 b) $P = (0, 0, 0); Q = (-3, -5, -1)$ e) $P = (-1, 4, 2); Q = (1, 4, 2)$
 c) $P = (3, 2, 1); Q = (1, 5, 6)$ f) $P = (1, 0, 0); Q = (0, 1, 0)$

9. Calcular $|\vec{v}|$ para los vectores del ejercicio anterior.
10. Dados los puntos $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (4, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$:
- Calcular la distancia de P a Q .
 - Dar las coordenadas del punto medio del segmento PQ .
 - Determinar un punto cuya distancia a P sea la mitad de su distancia a Q .
 - Obtener dos vectores paralelos a \overrightarrow{OP} de módulo 2.
11. Si $P = (-3, 1)$ y $Q = (x, 4)$, determinar todos los valores de x para los cuales el vector \overrightarrow{PQ} tiene módulo 5.
12. Cierta avión lleva una velocidad de 500 km por hora en dirección este. Si la velocidad del viento es de 60 km por hora en dirección noroeste, determinar la velocidad del avión respecto de la tierra.
13. Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de 20 m/s formando un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con la horizontal. Escribir la velocidad en términos de \mathbf{i} y \mathbf{j} .
14. Determinar los siguientes productos escalares :
- $(3, 1, 1) \cdot (5, 1, 7)$
 - $(-1, 1, -1) \cdot (3, 2, -1)$
 - $(10\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-21\mathbf{i} - \mathbf{k})$
15. Determinar a de modo que el ángulo entre $\vec{v} = a\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\vec{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ sea $\frac{\pi}{2}$.
16. Dado el vector $\vec{v} = (2, -5, 1)$, hallar la ecuación que deben satisfacer las componentes de un vector para ser ortogonal a \vec{v} . Dar dos vectores no paralelos entre ellos, que cumplan con la condición obtenida.
17. Dados \vec{u} y \vec{v} vectores cualesquiera, demostrar:
- La desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$$
 - La desigualdad triangular

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$
18. Dados \vec{u} y $\vec{v} \neq \vec{0}$ vectores paralelos de \mathbb{R}^n . Analizar y calcular el producto escalar entre ellos.
19. En una tienda de ropa se venden camisas a \$125, corbatas a \$80 y trajes a \$230. El mes pasado se vendieron 100 camisas, 200 corbatas y 50 trajes. ¿Cuál fue la recaudación total del mes?
20. Utilizando los vectores del ejercicio 1, obtener gráficamente las proyecciones $proy_{\vec{u}} \vec{w}$, $proy_{\vec{w}} \vec{v}$ y $proy_{\vec{v}} \vec{u}$.

21. Para los siguientes pares de vectores, representar en un mismo gráfico \vec{w} , \vec{v} y $\text{proy}_{\vec{w}}\vec{v}$; obtener analíticamente $\text{proy}_{\vec{w}}\vec{v}$.
- a) $\vec{v} = (2, 2, 6)$, $\vec{w} = (1, 3, 0)$
 b) $\vec{v} = (-1, 1, -1)$, $\vec{w} = (3, 2, -1)$
 c) $\vec{v} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\vec{w} = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$
22. Sean \vec{u} y $\vec{v} \neq \vec{0}$ vectores de \mathbb{R}^n . Demostrar que $(\vec{u} - \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$. Interpretar geométricamente esta igualdad.
23. Encontrar la componente horizontal, \mathbf{F}_x , y la componente vertical, \mathbf{F}_y , de una fuerza $\mathbf{F} = 39,5 \text{ kN}$ que se aplica en un punto formando un ángulo de -53° con la horizontal.
24. Dado los vectores $\vec{r} = (5, 1, 3)$ y $\vec{s} = (2, -3, -4)$, hallar los productos vectoriales $\vec{r} \times \vec{s}$ y $\vec{s} \times \vec{r}$.
25. Determinar cuáles de las siguientes expresiones no tiene sentido. ($\mathbf{k} = (0, 0, 1)$)
- a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ b) $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ c) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$
 d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ e) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ f) $|\vec{u}| \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
 g) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \mathbf{k}$ h) $\vec{u} \times \vec{v} + \mathbf{k}$ i) $(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}$
26. Mostrar que el área de un paralelogramo con \vec{a} y \vec{b} , como lados adyacentes es $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
27. Usar el ejercicio anterior para desarrollar una fórmula para el cálculo del área del triángulo con vértices $P(a, 0, 0)$, $Q(a, b, 0)$ y $R(0, 0, c)$. Graficar suponiendo que a, b y c son números reales positivos.
28. Demostrar que el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores, no coplaneres \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$.
29. Sea K el paralelepípedo determinado por $\vec{u} = (3, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (1, 3, 3)$.
- a) Calcular el volumen de K .
 b) Calcular el área de la cara determinada por \vec{u} y \vec{v} .
 c) Determinar el ángulo entre \vec{u} y el un vector perpendicular a los vectores \vec{v} y \vec{w} .
30. Calcular el volumen de los siguientes tetraedros:
- a) $A(-7, -2, 5)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-9, 3, 8)$ y $D(-7, 5, 9)$
 b) $A(-7, -2, 5)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-9, 3, 8)$ y $E(1, 21, 4)$ ¿Tienen alguna particularidad los puntos A, B, C y D ?

31. *Correspondencia ente números complejos y vectores de \mathbb{R}^2 :

Cada vector $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ determina un único punto A de coordenadas (a, b) . De igual modo, todo punto A de coordenadas (a, b) determina el vector \overrightarrow{OA} . Y cada punto (a, b) es el número complejo $a + bi$, por ello definimos las siguientes operaciones binarias

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}\tag{6.4}$$

- a) Escribir la forma binómica $a + bi$ usando (6.4).
- b) Probar que $i^2 = -1$.
- c) Si $a + bi = (a, b)$, demostrar que el opuesto de (a, b) es $(-a, -b)$ y el inverso de (a, b) , si $(a, b) \neq (0, 0)$, es $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

Capítulo 7

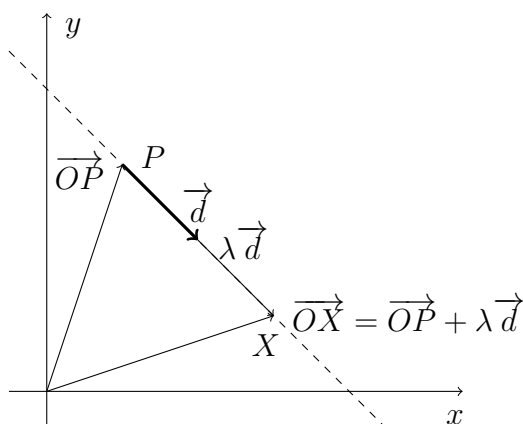
Geometría Analítica

7.1. Introducción

Las figuras geométricas están formadas por puntos que cumplen ciertas condiciones. El hecho de que los puntos puedan asociarse a vectores, que tienen una estructura operativa, permite expresar esas condiciones mediante relaciones algebraicas.

7.2. Ecuaciones de la recta

Una recta r queda determinada mediante uno de sus puntos, P , y una dirección. El punto da lugar a un vector $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, llamado vector posición de la recta. La dirección se determina mediante otro vector (vector director), \vec{d} , como muestra la figura:



Sea X un punto arbitrario sobre la recta r por lo tanto este es el punto extremo del vector $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$, y cada punto sobre la recta r es el punto final de la diagonal de un paralelogramo con lados $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ y $\lambda \vec{d}$ para algún valor real de λ . Vemos que todos los puntos sobre r son de la forma $\overrightarrow{OP} + \lambda \vec{d}$. Así, la recta r se puede expresar mediante la ecuación

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{d} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

7.2.1. Ecuación vectorial y paramétrica

Una ecuación vectorial de la recta r que contiene al punto P y tiene la dirección del vector \vec{d} es

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{d} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si en esta ecuación reemplazamos los vectores por sus componentes obtenemos una representación paramétrica de la recta.

Si los vectores pertenecen a \mathbb{R}^2 , una representación paramétrica de la recta r en el plano, que contiene al punto $P = (p_1, p_2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (d_1, d_2)$ es:

$$r : \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si los vectores pertenecen a \mathbb{R}^3 , una representación paramétrica de la recta r en el espacio, que contiene al punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y tiene la dirección de $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ es:

$$r : \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 7.1 Una representación paramétrica de la recta en el plano, que contiene al $P = (1, 2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (3, 4)$ es:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 7.2 Una representación paramétrica de la recta en el espacio, que contiene al $P = (0, 1, 3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (1, 5, 0)$ es:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 7.3 Encontrar una representación paramétrica de la recta en el espacio que contiene a los puntos $P = (-1, 1, 0)$ y $Q = (0, 0, 1)$. ¿Cuál es la representación paramétrica del segmento de recta que está entre los puntos P y Q ?

Solución: Como vector director de la recta podemos considerar el vector $\vec{d} = \overrightarrow{PQ} = (0 + 1, 0 - 1, 1 - 0) = (1, -1, 1)$ y como punto a $P = (-1, 1, 0)$. Así una representación paramétrica de la recta en el espacio, que contiene a los puntos $P = (-1, 1, 0)$ y $Q = (0, 0, 1)$ es:

$$s : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Si tomamos, en la representación (7.1), $\lambda = 0$, el punto (x, y, z) es $(-1, 1, 0)$ y si $\lambda = 1$ el punto (x, y, z) es $(0, 0, 1)$. Así los puntos (x, y, z) están entre los puntos $P = (-1, 1, 0)$ y $Q = (0, 0, 1)$ cuando $0 \leq \lambda \leq 1$. El segmento de recta que une a P y Q es

$$\overline{PQ} : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

□

Observemos que podemos considerar cualesquiera punto de la recta para determinar el vector posición y así obtener otra representación paramétrica de la misma recta, por lo tanto la representación paramétrica de una recta no es única. Otra representación paramétrica de la recta s , es

$$s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En cuanto al vector director, también podemos considerar cualquier vector que sea múltiplo del vector director anterior. Nuevamente obtenemos otra representación paramétrica de la recta s .

$$s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

De los ejemplos anteriores surgen las siguientes definiciones.

Definición 7.1 Una representación paramétrica de la recta l , que contiene a los puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ es:

$$l : \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } (x, y, z) \text{ es un punto cualquiera de } l$$

Definición 7.2 Una representación paramétrica del segmento de la recta l , que esta entre los puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ es:

$$\overline{PQ} : \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Es decir, que el segmento que une los puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ es el conjunto de puntos $X = (x, y, z)$ en el espacio, tal que:

$$\overline{PQ} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 / \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}), \lambda \in [0, 1] \right\}$$

En particular si $\lambda = \frac{1}{2}$, obtenemos el punto medio X_m del segmento \overline{PQ} .

$$\overrightarrow{OX}_m = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

7.3. Posiciones relativas de rectas

En el plano \mathbb{R}^2 dos rectas pueden ser coincidentes (o iguales), cortarse o no cortarse (paralelas distintas). En el espacio \mathbb{R}^3 al igual que en el plano las rectas pueden ser coincidentes (o iguales), cortarse o no cortarse. En este último caso hay dos posibilidades: paralelas distintas o alabeadas (no son paralelas y tampoco se cortan).

Analizaremos geoméricamente los casos mencionados

Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = q_1 + \alpha d'_1 \\ y = q_2 + \alpha d'_2 \\ z = q_3 + \alpha d'_3 \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Rectas paralelas:

Las rectas r y s son paralelas si los vectores directores \vec{d} y \vec{d}' son paralelos, es decir, r es paralela a s , si $\vec{d} = k\vec{d}'$, para algún $k \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, por las propiedades del producto vectorial tenemos

Proposición 7.1 Sean r y s dos rectas en \mathbb{R}^3 . La recta r es paralela a s si y solo si $\vec{d} \times \vec{d}' = \vec{0}$.

Si las rectas son paralelas pueden ser coincidentes o distintas. Para determinar si ocurre lo uno o lo otro, sustituimos un punto perteneciente a r en la recta s . Si se verifican las ecuaciones, el punto pertenece a ambas rectas por lo tanto son la misma recta.

Rectas No paralelas:

Si los vectores directores no son paralelos (para cada $k \in \mathbb{R}$, $\vec{d} \neq k\vec{d}'$), las rectas en el espacio se cortan o son alabeadas. Para ello tendremos que resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} p_1 + \lambda d_1 = q_1 + \mu d'_1 \\ p_2 + \lambda d_2 = q_2 + \mu d'_2 \\ p_3 + \lambda d_3 = q_3 + \mu d'_3 \end{cases}$$

en el cual las incógnitas son λ y μ . Si el sistema tiene solución las rectas se cortan, en otro caso son alabeadas.

Ejemplo 7.4 Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

Solución.

Vemos que $\vec{d} = (-5, 1, -1)$ es paralelo a $\vec{d}' = (10, -2, 2)$ por que

$$\vec{d} \times \vec{d}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 1 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Además se verifica que $(1, 4, 0) \in s$ y no pertenece a r . Por lo tanto las rectas son paralelas distintas. \square

Ejemplo 7.5 Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}.$$

Solución.

Los vectores directores $\vec{d} = (-3, 5, 1)$ y $\vec{d}' = (-1, 1, 0)$ no son paralelos (verificarlo), por lo tanto las rectas no son paralelas, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = \mu \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

ordenando el sistema tenemos

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu = -1 \\ 5\lambda + \mu = -3 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Dado que $\lambda = 5$, de la ecuación $3\lambda - \mu = -1$, obtenemos que $\mu = 16$ y de la ecuación $5\lambda + \mu = -3$ obtenemos $\mu = 28$, por lo tanto no existe un valor del parámetro μ que verifique las dos ecuaciones, es decir, las rectas son alabeadas. \square

Ejemplo 7.6 Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

Solución.

Los vectores directores $\vec{d} = (-3, 5, 1)$ y $\vec{d}' = (-1, 2, 0)$ no son paralelos (verificarlo), por lo tanto las rectas no son paralelas, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = 2\mu \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Obtenemos que $\lambda = 5$ y $\mu = 14$. El punto de corte se obtiene haciendo $\lambda = 5$ en las ecuaciones de r :

$$\begin{cases} x = 2 - 3 \cdot 5 = -13 \\ y = 3 + 5 \cdot 5 = 28 \\ z = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto se cortan en $(-13, 28, 5)$. \square

7.3.1. Ángulo entre rectas

Cuando dos rectas, como en el ejemplo anterior, se cortan podemos determinar cual es el menor ángulo (o simplemente ángulo) que forman. Este análisis se reduce al estudio del ángulo entre los vectores directores de las rectas.

Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = q_1 + \mu d'_1 \\ y = q_2 + \mu d'_2 \\ z = q_3 + \mu d'_3 \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

que se cortan en un punto, el ángulo entre ellas es el que determinan los vectores directores. Esto es

$$ang(r, s) = \arccos \left(\frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| |\vec{d}'|} \right).$$

Consideramos $|\vec{d} \cdot \vec{d}'|$ para determinar el ángulo agudo entre las rectas.

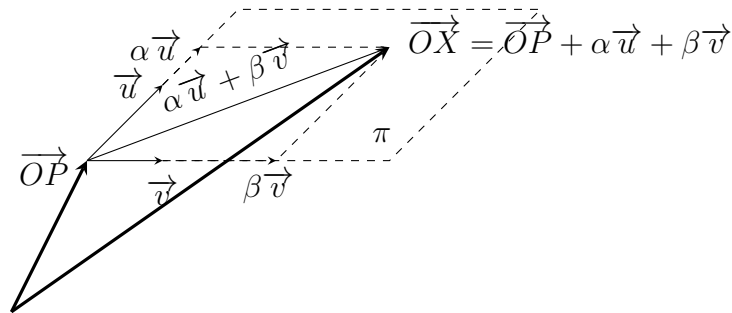
Por ejemplo el ángulo entre las rectas del ejemplo anterior es:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| |\vec{d}'|} = \frac{|(-3, 5, 1) \cdot (-1, 2, 0)|}{\sqrt{35}\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{35}\sqrt{5}} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{35}\sqrt{5}}\right) \sim 10^\circ \end{aligned}$$

7.4. Ecuaciones del plano

7.4.1. Ecuación vectorial y representación paramétrica

Un plano π queda determinado mediante uno de sus puntos, P , y dos direcciones. El punto da lugar a un vector $\vec{OP} = \vec{p}$, llamado vector posición del plano. La dirección se determina mediante dos vectores (vectores directores), \vec{v} y \vec{u} , como muestra la figura:



Por lo tanto el plano π es el conjunto de puntos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\pi = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : \vec{OX} = \vec{OP} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Definición 7.3 Una ecuación vectorial del plano que contiene al punto P y es paralelo a los vectores \vec{u} y \vec{v} es

$$\pi : \vec{OX} = \vec{OP} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si en la ecuación vectorial, sustituimos el punto por sus coordenadas, $P = (p_1, p_2, p_3)$, y los vectores por sus componentes, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, da lugar a una representación paramétrica:

$$\pi : \begin{cases} x = p_1 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = p_2 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = p_3 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (7.2)$$

Cada par de valores que asignamos a α y β nos dará un punto X del plano π .

Ejemplo 7.7 Hallar una ecuación vectorial y representación paramétrica del plano que pasa por $P = (2, 3, 5)$ y es paralelo a $\vec{u} = (-1, -2, -3)$ y $\vec{v} = (1, 3, 5)$.

Solución.

Una ecuación vectorial es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OP} + \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} \\ (x, y, z) &= (2, 3, 5) + \alpha(-1, -2, -3) + \beta(1, 3, 5) \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Representación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - \alpha + \beta \\ y = 3 - 2\alpha + 3\beta \\ z = 5 - 3\alpha + 5\beta \end{cases} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

□

7.4.2. Ecuación Implícita

Si en la representación paramétrica (7.2) eliminamos α y β nos quedaremos con una ecuación del tipo

$$\pi : a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$$

con

$$\vec{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \quad (7.3)$$

El vector $\vec{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es perpendicular al plano π , es decir, es perpendicular a todos los vectores del tipo $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, al vector \vec{w} se dice que es combinación lineal (C.L.) de \vec{u} y \vec{v} .

Definición 7.4 Una ecuación implícita del plano π que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y que es normal al vector $\vec{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es

$$\vec{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Al vector \vec{n} lo denominamos vector normal al plano π .

A partir de la ecuación implícita podemos obtener la llamada ecuación normal.

Definición 7.5 Una ecuación normal del plano π es

$$ax + by + cz = d$$

donde denominamos vector normal al vector $\vec{n} = (a, b, c)$ y término independiente al escalar d .

Ejemplo 7.8 Determine una ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos

$$P_1 = (1, -2, 3), P_2 = (4, 1, -2) \text{ y } P_3 = (-2, -3, 0).$$

Solución:

Para la elección de los vectores tomamos $\vec{u} = \overrightarrow{P_2P_1} = (-3, -3, 5)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{P_2P_3} = (-6, -4, 2)$. El vector $k(\vec{u} \times \vec{v})$ con $k \in \mathbb{R}$, es perpendicular a \vec{u} y \vec{v} , por lo tanto es perpendicular al plano.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -3 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Luego $\vec{n} = k(14\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$.

Elegimos arbitrariamente a $P_2 = (4, 1, -2)$ para formar el vector posición y como vector normal $14\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, así una ecuación implícita es

$$14(x - 4) - 24(y - 1) - 6(z + 2) = 0$$

y la ecuación normal es

$$14x - 24y - 6z = 44.$$

□

7.5. Posiciones relativas de Planos

Dos planos en \mathbb{R}^3 , pueden cortarse o no cortarse. En el caso de cortarse pueden ser planos coincidentes o cortarse en una recta. Si los planos no se cortan, estos son paralelos.

Planos paralelos

Definición 7.6 *Los planos π_1 y π_2 son paralelos o coincidentes si los vectores normales \vec{n} y \vec{n}' son paralelos.*

Dados los planos $\pi_1 : ax + by + cz = d$ y $\pi_2 : a'x + b'y + c'z = d'$. Si los vectores normales $\vec{n} = (a, b, c)$ y $\vec{n}' = (a', b', c')$ son paralelos, es decir existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{n} = k\vec{n}'$. Entonces analizamos los términos independientes de los planos π_1 y π_2 :

- Si los términos independientes no sigue la relación de dependencia, es decir $d \neq kd$, los planos son paralelos no coincidentes.
- Si los términos independientes siguen la relación de dependencia, es decir $d = Kd$, los planos son coincidentes.

Ejemplo 7.9 *Si estudiamos la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad x - 3y + 4z &= 11 \\ \pi_2 : \quad 4x - 12y + 16z &= -40 \end{aligned}$$

Notamos que los vectores normales son paralelos $4(1, -3, 4) = (4, -12, 16)$, mientras que el término independiente $-40 \neq 4 \cdot 11$, no conserva la proporcionalidad. Luego los planos son paralelos distintos.

Haciendo uso de las propiedades de producto vectorial, podemos determinar cuando dos planos son paralelos.

Proposición 7.2 π_1 es paralelo a π_2 si y solo si $\vec{n} \times \vec{n}' = \vec{0}$.

Planos no paralelos

Si el producto vectorial $\vec{n} \times \vec{n}' \neq \vec{0}$, por la proposición 7.2 los planos no son paralelos. El vector obtenido es un vector perpendicular a ambos vectores normales, y determina la dirección de la recta que es intersección de ambos planos.

Ejemplo 7.10 Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{aligned}\pi &: 2x - y - 5z = -14 \\ \pi_1 &: 4x + 5y + 4z = 28\end{aligned}\tag{7.4}$$

Solución.

Con los vectores normales $\vec{n} = (2, -1, -5)$ y $\vec{n}^1 = (4, 5, 4)$ calculamos el producto vectorial

$$\vec{n} \times \vec{n}^1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 21\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 14\mathbf{k} \neq \vec{0}$$

por lo tanto los planos se cortan y la dirección de la recta que es intersección de ambos planos es $\vec{d} = \vec{n} \times \vec{n}^1 = 21\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$. También podemos usar como vector generador de la recta cualquier otro vector paralelo a \vec{d} por ejemplo $\frac{1}{7}(21, -28, 14) = (3, -4, 2)$. A continuación determinamos un punto perteneciente a la recta como el punto $P = (0, 4, 2)$, el cual es obtenido, en este caso, haciendo $x = 0$ en (7.4) y resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -y - 5z = -14 \\ 5y + 4z = 28 \end{cases}$$

resulta que $y = 4$ y $z = 2$. Luego tenemos que una representación paramétrica de la recta intersección es:

$$r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

7.6. Representación gráfica de rectas y planos

En las secciones anteriores hemos aprendido a obtener y trabajar, rectas y planos. Las ecuaciones de los mismos son un recurso técnico útil y eficaz para obtener en forma mecánica relaciones entre ellos. Las representaciones gráficas que vamos a realizar sirven para ver las figuras con las que trabajamos, pero sobre todo, para pensar en el papel que juegan los parámetros y las incógnitas.

7.6.1. Representación gráfica de rectas en \mathbb{R}^3

Dada la recta

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Lo primero que podemos hacer es dibujar el vector $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ en el origen de coordenadas y luego sobre el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$, trazamos una recta paralela al vector \vec{d} .

Otra forma de proceder es determinar los puntos (si existen) de intersección de la recta con los planos coordenados.

Ejercicio 7.1 Representar la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \lambda \\ z = \frac{1}{2} - \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad (7.5)$$

Solución.

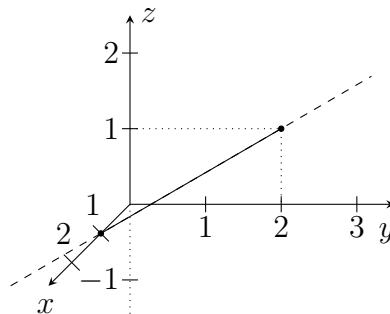
Esta recta pasa por el punto $P = (1, 1/2, 1/2)$ y tiene como vector director a $\vec{d} = (2, 1, -1)$.

Lo primero que determinamos son los puntos (si existen) de intersección de la recta con los planos coordenados:

- La intersección de r con el plano yz , se obtiene haciendo $x = 0$, en la ec.8.5, obtenemos que $\lambda = -1/2$, lo que nos determina el punto $(0, 0, 1)$.

- La intersección de r con el plano xz , se obtiene haciendo $y = 0$, en la ec.8.5, obtenemos que $\lambda = -1/2$, lo que nos determina el punto $(0, 0, 1)$.

- La intersección de r con el plano xy , se obtiene haciendo $z = 0$, en la ec.8.5, obtenemos que $\lambda = 1/2$, lo que nos determina el punto $(2, 1, 0)$.



□

Ejemplo 7.11 Graficar la recta en el espacio, que contiene al $P = (0, 2, 3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (3, -2, 0)$.

Solución.

La ecuación paramétrica de esta recta es:

$$r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad (7.6)$$

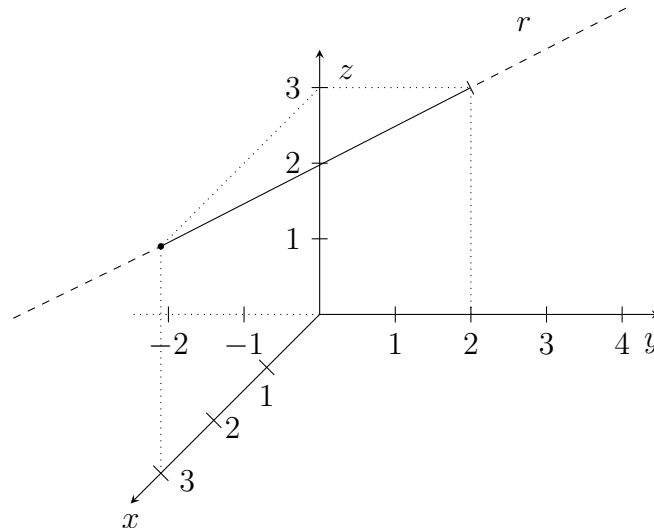
Lo primero que determinamos son los puntos (si existen) de intersección de la recta con los planos coordenados.

- La intersección de r con el plano yz , se obtiene haciendo $x = 0$, en la ec.8.4, obtenemos que $\lambda = 0$, lo que nos determina el punto $(0, 2, 3)$.

- La intersección de r con el plano xz , se obtiene haciendo $y = 0$, en la ec.8.4, obtenemos que $\lambda = 1$, lo que nos determina el punto $(3, 0, 3)$.

- La intersección de r con el plano xy , se obtiene haciendo $z = 0$, en la ec.8.4, en este ejemplo podemos observar que nunca z puede ser 0, lo que no indica que la recta no corta al plano xy , es

paralela a él.



□

7.6.2. Representación gráfica de Planos

La mejor forma de representar un plano es señalar su intersección con los ejes y con los planos coordenados.

- La intersección de un plano

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

Con un eje, por ejemplo el eje x , es el punto que se consigue haciendo $y = 0$ y $z = 0$. Por tanto es

$$ax + d = 0 \rightarrow x = \frac{-d}{a}$$

Se trata de un punto sobre el eje x de la forma $\left(\frac{-d}{a}, 0, 0\right)$.

Observe que a tiene que ser *distinto de cero*. ¿Que podemos decir del plano si $a = 0$?

- La intersección de un plano π , con un plano coordenado, por ejemplo con el plano xy , cuya ecuación es $z = 0$, es

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

obtenemos una recta $ax + by + d = 0$ situado en al plano xy .

Ejemplo 7.12 Representar el plano $3x + y - 2z = 6$

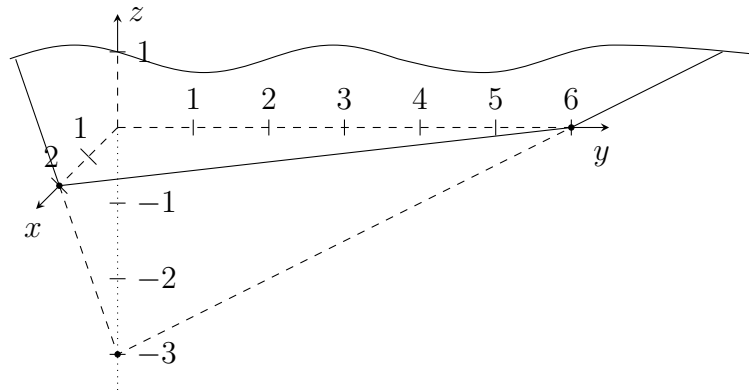
Solución:

La intersección con los ejes son:

Eje x : $y = 0, z = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0, 0)$

Eje y : $x = 0, z = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6, 0)$

Eje z : $y = 0, x = 0 \rightarrow z = -3 \rightarrow (0, 0, -3)$



□

Observación: 1) Si el término independiente d de la ecuación del plano es cero, el plano corta a los tres ejes el punto $(0, 0, 0)$.

2) Si en la ecuación del plano falta un variable, por ejemplo z , el plano será paralelo al eje z .

7.7. Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes casos :

i) $Q = (-2, 3)$; $\vec{d} = (1, 1)$ ii) $Q = (-1, 5)$; $\vec{d} = (0, 4)$

iii) $Q = (0, -1)$; $\vec{d} = (-2, 1)$ iv) $Q = (1, -4)$; $\vec{d} = (2, 0)$

- Determinar una ecuación vectorial y una paramétrica de la recta que pasa por el punto Q y tiene la dirección del vector \vec{d} .
- Dar tres vectores paralelos a cada una de las rectas.
- Dar seis puntos más de cada una de las rectas.
- Graficar las rectas, los puntos y los vectores obtenidos para cada caso.

2. Para cada uno de los siguientes casos :

i) $Q = (-1, 2, 1)$; $\vec{d} = (1, 1, 1)$ ii) $Q = (-1, 1, 5)$; $\vec{d} = (1, 0, 4)$

iii) $Q = (0, -1, 0)$; $\vec{d} = (2, 1, 2)$ iv) $Q = (1, 1, -4)$; $\vec{d} = (2, 1, 0)$

- Determinar una ecuación vectorial y una paramétrica de la recta que pasa por el punto Q y tiene la dirección del vector \vec{d} .
- Dar tres vectores paralelos a cada una de las rectas.
- Dar seis puntos más de cada una de las rectas.
- Graficar las rectas, los puntos y los vectores obtenidos para cada caso.

3. Hallar una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos P y Q para cada uno de los siguientes casos.

$$i) \quad P = (0, 0); Q = (3, 4) \quad iv) \quad P = (-3, 2, 0); Q = (3, 2, 1)$$

$$ii) \quad P = (1, 2); Q = (-1, 2) \quad v) \quad P = (-1, 1, 4); Q = (0, 4, 2)$$

$$iii) \quad P = (3, 2); Q = (5, 6) \quad vi) \quad P = (1, 0, 1); Q = (0, 1, 0)$$

4. Indicar a cuáles de las rectas pertenecen los siguientes puntos

$$P = (0, -8); \quad Q = (-1, -2); \quad R = (1, -2); \quad S = (-2, -6);$$

$$T = (1, 3); \quad U = (-2, 6); \quad V = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

a) $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{d}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ para los casos en que:

$$i) \quad \vec{p} = (0, 4); \vec{d} = \left(1, \frac{3}{2}\right) \quad iii) \quad \vec{p} = (0, -8); \vec{d} = \left(1, \frac{-3}{2}\right)$$

$$ii) \quad \vec{p} = (0, -8); \vec{d} = \left(1, \frac{2}{3}\right) \quad iv) \quad \vec{p} = (0, 1); \vec{d} = (1, -1)$$

$$b) \quad r : \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$c) \quad r : \begin{cases} x = -4 - 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

5. Dar una representación paramétrica de la recta r que verifica:

a) Pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (1, 1)$

b) Pasa por el punto $P = (1, 2)$ y es paralela a la recta

$$l : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 8 - 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Pasa por el punto $P = (3, -1)$ y es perpendicular al vector $\vec{w} = (-2, -3)$

6. Estudiar la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

$$a) \quad r : \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad r : \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

$$c) \quad r : \begin{cases} x = 21 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

$$d) \quad r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

$$(d) \quad r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

7. Para cada uno de los siguientes casos :

$$i) \quad P = (2, 3, 5), \quad \vec{u} = (1, 2, 3), \quad \vec{v} = (1, 3, 5)$$

$$ii) \quad P = (3, -1, 5), \quad \vec{u} = (-2, 1, -5), \quad \vec{v} = (-3, 4, -9)$$

$$iii) \quad P = (2, 1, 7), \quad \vec{u} = (1, 0, 4), \quad \vec{v} = (4, -1, 3)$$

a) Determinar una ecuación vectorial, una paramétrica y una implícita del plano que pasa por el punto P y es paralelo a los vectores \vec{u} y \vec{v} .

b) Dar tres puntos que pertenezcan a cada uno de ellos.

c) Determinar si los siguientes puntos pertenecen a algunos de los planos obtenidos.

$$P = (1, 1, 2) \quad Q = (3, 1, 11) \quad R = (1, 1, 3)$$

$$O = (-2, 4, -9) \quad T = (-2, 1, -9)$$

d) Para cada uno de los planos, dar tres vectores paralelos a cada uno de ellos.

e) Graficar, en distintos sistemas, los planos con los puntos pertenecientes a cada uno de ellos.

8. Hallar una ecuación paramétrica y una implícita del plano que pasa por el origen y es paralelo a los vectores $\vec{v} = (2, 1, -1)$ y \vec{PQ} donde $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (-3, 5, -2)$.

9. Dado el vector $\vec{v} = (7, -2, -3)$ encontrar la condición de que debe cumplir cualquier otro vector para ser perpendicular a este.

10. Dado el plano $\pi : a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$ con

$$\vec{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

demostrar que el vector $\vec{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, es perpendicular al plano π , es decir, es perpendicular a todos los vectores del tipo $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

11. Determinar las ecuaciones de un par de planos cuya intersección sea la recta dada.

$$a) \quad r : \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -7 + 2\lambda \\ z = 6 - \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad r : \begin{cases} x = 5t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

$$c) \quad r : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

12. Dar una ecuación de los planos xy , xz y yz .

13. Hallar los puntos de intersección de la recta $r : \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

con los planos coordenados.

14. Demostrar que la recta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, esta contenida en el plano

$6x + 4y - 4z = 0$ y es perpendicular al plano $4y + 4z = 1$.

15. Determinar si los vectores $\vec{u} = (3, -8, -14)$, $\vec{v} = (-1, -2, 3)$ y $\vec{w} = (\frac{1}{2}, 2, 1)$ son o no paralelos al plano $2x - y + z = 2$

16. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de planos

$$a) \quad \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

17. Encontrar (si existe) la intersección de la recta L con el plano α para:

$$a) \quad L : \begin{cases} x - 4 = 5t \\ y - 2 = t \\ z - 4 = -t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha : 3x - y + 7z + 8 = 0$$

$$b) \quad L : \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 3 = 2t \\ z + 1 = 3t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha : z = 3$$

18. Determinar el plano que pasa por el punto $P = (2, -7, 6)$ y es paralelo al plano $5x - 2y + z - 9 = 0$.

19. Determinar el plano que pasa por el punto $Q = (0, -4, 2)$ y es perpendicular al plano $-2x + 3y - z = 8$.

20. Determinar la posición relativa de la recta

$$L : \begin{cases} x - 4 = 4t \\ y - 3 = t \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad \text{y el plano} \quad 3x + 2y + z = 7.$$

21. Encontrar la ecuación del plano determinado por las rectas

$$L : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad S : \begin{cases} x = -13 + 12\lambda \\ y = 1 - 6\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

22. * **Distancia de un punto a un plano.**

a) Sea P un punto perteneciente a un plano cuyo vector normal es \vec{n} y Q un punto que no pertenece al plano. Mostrar que la distancia d de Q al plano está dada por

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

y usar este resultado para calcular la distancia de $(4, -2, -3)$ al plano $4x - 4y + 2z = 2$.

b) Calcular la distancia entre los planos paralelos $3x - 4y + 5z = 9$ y $3x - 4y + 5z = 4$.

23. * **Distancia de un punto a una recta.**

a) Sea P un punto perteneciente a una recta con vector director \vec{v} y Q un punto que no pertenece a la recta. Mostrar que la distancia d de Q a la recta está dada por

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

b) Calcular la distancia de $Q(1, 0, -4)$ a la recta $S : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Calcular la distancia entre las rectas paralelas

$$L : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad S : \begin{cases} x = -13 + 12\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

24. * **Distancia entre rectas.**

Sean P y Q puntos sobre rectas que no se cortan ni son paralelas, con vectores directores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 y sea $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Mostrar que la distancia d entre estas rectas es

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Capítulo 8

Sistemas de ecuaciones lineales

8.1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen. Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones. En este capítulo daremos el Método de eliminación, aunque existe hace siglos, fue sistematizado por Karl F. Gauss (1777-1855) Camille Jordan (1838-1922). En la actualidad, este método se utiliza para resolver sistemas de gran tamaño por medio de computadoras.

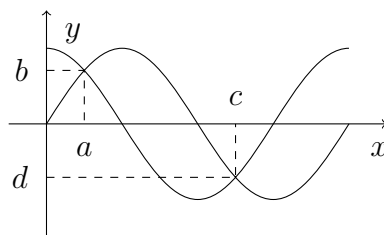
En matemática mas del 75 % de los problemas que se encuentran en aplicaciones científicas o industriales se requiere trabajar en forma simultánea con mas de una ecuación donde aparecen variables diversas, es decir, con sistemas de ecuaciones y en gran parte de estos son sistemas de ecuaciones lineales.

De aquí se deriva el enorme interés por conseguir métodos rápidos, eficaces y económicos para resolver estos sistemas. En este capítulo veremos el método de Gauss que nos permite resolver los sistemas de ecuaciones lineales.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales hasta la llegada de los computadores digitales (segunda mitad del siglo XX) estaba muy limitada, no por la complejidad del problema, sino por el número de operaciones aritméticas que se debían realizar. Ahora se puede resolver fácilmente sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas con el uso de una PC en pocos segundos.

8.2. Sistemas de Ecuaciones

Consideremos dos funciones f y g (figura 1). Cada una de las ecuaciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ tienen infinitas soluciones que se sitúan, respectivamente, en cada una de las gráficas de las funciones dibujadas. En la práctica, en ocasiones hay que encontrar puntos comunes $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$, en donde las gráficas se intersecan.



Decimos que el punto $P = (a, b)$ es solución del sistema de ecuaciones si es simultáneamente solución de cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

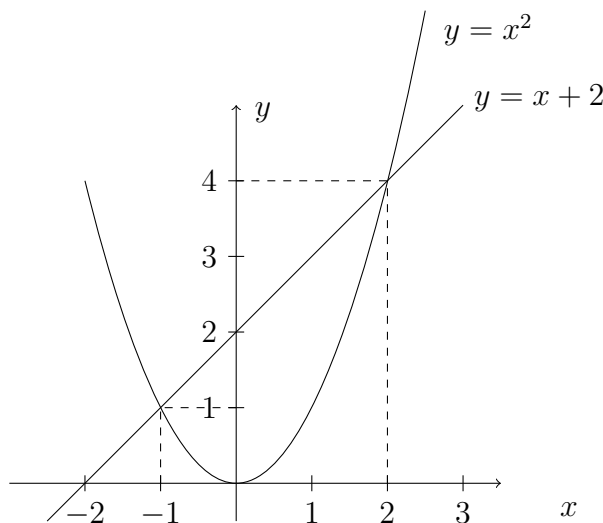
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \text{ es decir } \begin{cases} b = f(a) \\ b = g(a) \end{cases} \quad y$$

Resolver un sistema de ecuaciones, consiste en encontrar todos los puntos que son solución de sistema.

Ejemplo 8.1 a) Consideremos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 4)$. Las gráficas de las ecuaciones son la parábola y la recta de la figura 2 y $(-1, 1)$ y $(2, 4)$ son los puntos donde se intersecan las gráficas



b) Si consideramos el sistema

$$\begin{cases} z = \sqrt{5} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son los puntos de corte del plano $(z = \sqrt{5})$ con los de la superficie esférica $(x^2 + y^2 + z^2 = 9)$. Estos están situados sobre una circunferencia $(x^2 + y^2 = 4)$.

En esta unidad solo trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales o simplemente sistemas lineales.

8.2.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal con n incógnitas tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n y b son números reales y x_1, x_2, \dots, x_n son variables. Por lo tanto un sistema de m ecuaciones lineales, con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (8.1)$$

Donde los términos a_{ij} y b_i son números reales. Nos referiremos a los sistemas de la forma (8.1) como sistema lineal $m \times n$. Si en el sistema (8.1) todos los b_i son igual a 0, el sistema se llama sistema homogéneo.

Ejemplo 8.2 Clasificar los sistemas siguientes

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ -2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} -2x + 3y + 4z = -1 \\ x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ 3x + y - 2z - w = 3 \end{cases}$$

El sistema (a) es un sistema de 2×2 y (f) es un sistema de 4×4 . Los sistemas (b) y (e) son de orden de 2×3 y de 3×2 respectivamente. Los sistemas (c) y (d) son homogéneo de 3×3 .

Una solución de un sistema $m \times n$ es una n -upla de números que satisface todas las ecuaciones. El conjunto de todas las soluciones del sistema recibe el nombre de conjunto solución.

Ejemplo 8.3 Si consideramos los sistemas del ejemplo 8.2, vemos que el punto $(1, 2)$ es una solución del sistema (a), ya que:

$$\begin{aligned} 1.(1) + 2.(2) &= 5 \\ 2.(1) + 3.(2) &= 8 \end{aligned}$$

Los puntos $(5, -3, 0)$ y $(0, 7, -5)$ son soluciones de (b), puesto que:

$$\begin{aligned} 2.(5) + 3.(-3) + 4.(0) &= 1 & y & & 2.(0) + 3.(7) + 4.(-5) &= 1 \\ 3.(5) + 4.(-3) + 5.(0) &= 3 & & & 3.(0) + 4.(7) + 5.(-5) &= 3 \end{aligned}$$

Además podemos verificar que $(0, 0, 0)$ es la única solución del sistema (c), $(0, 0, 0)$ y $(-1, 1, 1)$ son soluciones del sistema (d), y el sistema (e) no tiene solución.

En general diremos que un sistema de ecuaciones es compatible si tiene solución. En particular es compatible determinado si la solución es única, mientras que si tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado.

Si el sistema no tiene solución, es decir el conjunto solución es vacío, diremos que es incompatible o inconsistente.

Teorema 8.1 *Todo sistema homogéneo es compatible.*

Demostración.

Dado el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

Notemos que independiente del valor de los coeficientes a_{ij} , $(0, \dots, 0)$ es una solución del sistema homogéneo (8.2) porque verifica todas las ecuaciones. ■

Dado el sistema homogéneo (8.2), a $(0, \dots, 0)$ se la denomina *solución trivial*.

Para obtener todas las soluciones de un sistema dado utilizaremos el método de Gauss, el cual nos permite encontrar un sistemas equivalentes mas sencillo de resolver.

Sistemas Equivalentes

Dos ecuaciones, se dicen equivalentes cuando tienen igual conjunto solución.

Ejemplo 8.4 *Verificar que:*

1. $x - 3y = 7$ es equivalente a $5x - 15y = 35$.

Ya que el conjunto solución de ambas ecuaciones es $\{(x, y) : y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3} \wedge x \in \mathbb{R}\}$, las ecuaciones son equivalentes.

2. $x + y + 2z = 1$ es equivalente a $5x + 5y + 10z = 5$.

Estas dos ecuaciones tiene el mismo conjunto solución ya que representan el mismo plano. Por lo tanto son ecuaciones equivalentes.

Dos sistemas de ecuaciones con las mismas variables, son equivalentes cuando tienen igual conjunto solución.

Ejemplo 8.5 *Los siguientes sistemas son equivalentes*

$$(a) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ + x_2 = 3 \\ + + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

por que son sistemas compatibles determinados y la solución es $(-2, 3, 2)$.

Podemos observar que el sistema (a) es más sencillo de resolver que el sistema (b) y realizando algunas transformaciones podemos pasar del sistema (b) al sistema (a). Para ello sumamos las dos primeras ecuaciones del sistema (b) y obtenemos la segunda ecuación del sistema (a):

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ \hline x_2 = 3 \end{array}$$

y si restamos la tercera menos la primera ecuación del sistema (b) y obtenemos la tercera ecuación del sistema (a):

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ \hline 2x_3 = 4 \end{array}$$

Si (x_1, x_2, x_3) es solución del sistema (b) debe satisfacer todas las ecuaciones que lo forman, y va a verificar cualquier nueva ecuación que se obtiene al combinar las ecuaciones del sistema. Por lo tanto, satisface $x_2 = 3$ y $2x_3 = 4$.

En consecuencia, cualquier solución del sistema (b) es también solución del sistema (a). Citando argumentos similares, puede demostrarse que cualquier solución del sistema (a) es también solución del sistema (b).

Algunas de las operaciones que podemos realizar para obtener sistemas equivalentes son:

1. Se pueden intercambiar el orden en el cual se escriben dos ecuaciones.
2. Una ecuación se puede multiplicar o dividir por una constante distinta de cero.
3. Un múltiplo de una ecuación se puede sumar a otra.

Estas son las operaciones en las que se basa el método de Gauss para obtener un sistemas equivalentes más fácil de resolver.

8.2.2. Método de Gauss

Un sistema de ecuaciones es de forma escalonada si en la k -ésima ecuación los coeficientes de las primeras $k - 1$ variables son cero y el de la k -ésima es distinto de cero. Para resolver este tipo de sistemas usamos sustitución hacia atrás.

Ejemplo 8.6 Resolver el siguiente sistema dado en forma escalonada

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Este caso, el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es $\{(4, 3, 2)\}$.

Sería muy deseable poder transformar cualquier sistema de ecuaciones en otro que tenga forma escalonada. El método que utilizaremos para ello es el método de eliminación de Gauss. Veremos el método con un ejemplo.

Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad (8.3)$$

Para trabajar con mayor comodidad intercambiamos las dos primeras ecuaciones, obteniendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

1° paso: Eliminamos x_1 de la segunda ecuación. Para ello sumamos -2 veces la primera ecuación a la segunda y el resultado lo sustituimos en la segunda ecuación obteniendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 - 10x_3 = -5 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

2° paso: Eliminamos x_1 de la tercera ecuación. Sumamos 3 veces la primera ecuación a la tercera y el resultado lo sustituimos en la tercera ecuación obteniendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 - 10x_3 = -5 \\ -2x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases}$$

3° paso: Eliminamos x_2 de la tercera ecuación. Sumamos $\frac{2}{5}$ veces la segunda ecuación a la tercera y el resultado lo sustituimos en la tercera ecuación obteniendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 - 10x_3 = -5 \\ 4x_3 = 8 \end{cases} \quad (8.4)$$

Finalmente resolvemos este sistema escalonado por sustitución hacia atrás obteniendo la solución $(4, 3, 2)$.

Observación:

1) Podríamos resolver un sistema escalonado aún más sencillo transformando en 1 los coeficientes de la diagonal. Por lo tanto el sistema (8.4) es equivalente al sistema (8.5), multiplicando por $\frac{1}{5}$ y por $\frac{1}{4}$ la segunda y tercera ecuación respectivamente del sistema (8.4)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 2. \end{cases} \quad (8.5)$$

Este sistema es del Ejemplo (8.6) y la solución es $(4, 3, 2)$.

2) En todo el proceso, las ecuaciones y las incógnitas sean mantenido sólo hemos modificado los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. Por lo tanto las modificaciones podrían hacerse usando exclusivamente los números, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A este arreglo lo llamaremos matriz asociada al sistema, donde las tres primeras columnas representan los coeficientes asociados a las incógnitas y la última los términos independientes, por ello tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Matriz de coeficientes})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \quad (\text{Matriz aumentada})$$

Antes de estudiar un método de matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales daremos la definición de matriz.

Definición 8.1 *Dados m y n enteros positivos. Llamamos matriz de dimensión $m \times n$ a una tabla de números reales a_{ij} con m filas (o renglones) y n columnas de la siguiente forma:*

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los números a_{ij} es el elementos de la matriz $A_{m \times n}$ correspondiente a la fila i y a la columna j .

Si $m = n$ decimos que la matriz es cuadrada de dimensión n .

Si los elementos a_{ij} son 0 para $i < j$, entonces decimos que la matriz es escalonada.

Ahora aplicamos un proceso similar al de Gauss pero trabajando con las matrices. Las operaciones que podemos realizar sobre las filas de una matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales para obtener otra matriz asociada a un sistema equivalente al dado son:

1. Se pueden intercambiar el orden en el cual están escritas dos filas.
2. Una filas se puede multiplicar o dividir por una constante distinta de cero.
3. Un múltiplo de una filas se pude sumar a otra.

Las operaciones indicadas en 1), 2) y 3) son transformaciones elementales de las filas de un matriz y usaremos las siguientes notaciones:

Símbolo	significado
$F_i \leftrightarrow F_j$	Intercambiar fila i por j
$kF_i \rightarrow F_i$	Multiplicar la fila i por k
$F_i + F_j \rightarrow F_j$	sumar la fila i a la j

Ejemplo 8.7 *Apliquemos el método de matrices al sistema (8.1)*

Solución.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2 \rightarrow F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_1 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{2}{5}F_2 + F_3 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{1}{5}F_2 \leftrightarrow F_2 \\ \frac{1}{4}F_3 \leftrightarrow F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Con la matriz final regresamos al sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

que es equivalente al sistema original. La solución $(4, 3, 2)$ se puede encontrar ahora por sustitución hacia atrás. \square

Ejemplo 8.8 Resolver los sistemas (b), (c) y (e) del Ejemplo (8.2)

Solución.

Resolvemos primero el sistema e)

$$(e) \begin{cases} -2x + 3y + 4z = -1 \\ x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ 3x + y - 2z - w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Hemos dispuesto las ecuaciones de modo que aparezcan las mismas variables en columnas verticales. Comenzamos con la matriz aumentada y luego obtenemos una forma escalonada, usando transformaciones elementales.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 2F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 + F_4 \rightarrow F_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -3F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \\ -1F_2 + F_4 \rightarrow F_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{-1}{3}F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

El sistema asociado a la última matriz es:

$$\begin{cases} x & - 2z & + 2w & = & 1 \\ & y & + z & - w & = & 0 \\ & & z & - \frac{7}{3}w & = & -\frac{1}{3} \\ & & & w & = & 1 \end{cases}$$

Usando sustitución hacia atrás obtenemos la solución $(3, -1, 2, 1)$. Por lo tanto el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es: $\{(3, -1, 2, 1)\}$.

Resolvemos el sistema (b)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right) \quad (8.6)$$

Comenzamos con la matriz aumentada y luego obtenemos una forma escalonada, usando transformaciones elementales.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-2F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

El sistema $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} x = z + 5 \\ y = -2z - 3 \end{cases}$

Este sistema es compatible indeterminado, tiene un número infinito de soluciones, por lo tanto el conjunto solución es:

$$\{(x, y, z) : x = \lambda + 5 \wedge y = -2\lambda - 3 \wedge z = \lambda \wedge \lambda \in \mathbb{R}\}. \quad (8.7)$$

Resolvamos el sistema (c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ -2x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible por que se llega a la ecuación $0x_1 + 0x_2 = 2$ la cual es imposible y el conjunto solución es el conjunto vacío. \square

Resolver los siguientes sistemas homogéneos:

$$a) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Solución.

Por el Teorema 1 sabemos que estos sistemas siempre son compatibles a continuación vamos a analizar si son determinados o indeterminados.

En los sistemas homogéneos solo trabajamos con la matriz de los coeficientes.

Aplicando operaciones elementales a las filas de las matrices obtenemos que el sistema a)

$$a) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{ es equivalente a } \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ -2z = 0. \end{cases}$$

Usando sustitución hacia atrás obtenemos que la única solución es $(0, 0, 0)$. Por lo tanto el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es: $\{(0, 0, 0)\}$.

El sistema b)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{ es equivalente a } \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado, tiene un número infinito de soluciones, por lo tanto el conjunto solución será:

$$\{(x, y, z) : x = -\lambda \wedge y = \lambda \wedge z = -\lambda \wedge \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{8.8}$$

□

8.2.3. Aplicaciones

Posiciones relativas de planos y rectas.

Ejemplo 8.9 Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

1. $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 1$ y $\pi_2 : 3x + 4y + 5z = 3$
2. $\pi_1 : x - 3y + 4z = 11$ y $\pi_2 : 4x - 12y + 16z = -40$.
3. $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : x + z = 0$ y $\pi_3 : x - z = 0$.

Solución.

1. Tenemos que resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$

Este sistema es compatible indeterminado, y el conjunto solución es el obtenido en (8.7),

$$\{(x, y, z) / x = \lambda + 5 \wedge y = -2\lambda - 3 \wedge z = \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Los elementos de este conjunto forman una recta para la cual una representación paramétrica de ella puede ser :

$$r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Esta recta representa la intersección de los planos π_1 y π_2 .

2. Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 11 \\ 4x - 12y + 16z = -40 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 11 \\ 0 = 84 \end{cases}$$

equivalente al dado. Este sistema es un sistema incompatible debido a la inconsistencia de la segunda ecuación. El conjunto solución es vacío. Por lo tanto los planos los planos π_1 y π_2 son paralelos distintos.

3. Tenemos que resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Este sistema es compatible indeterminado, el conjunto solución es el obtenido en (8.8)

$$\{(x, y, z) / x = -\lambda, y = \lambda, z = -\lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Los elementos de este conjunto forman una recta para la cual una representación paramétrica de ella puede ser :

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Esta recta contiene al origen y es la intersección de los planos cuyas ecuaciones forman el sistema. \square

Ejemplo 8.10 *Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:*

1.

$$r : \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

2.

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R} .$$

3.

$$r : \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R} .$$

Solución.

1. Debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3 - 5\lambda = 1 + 10\mu \\ 2 + \lambda = 4 - 2\mu \\ 5 - \lambda = 2\mu \end{cases} \quad (8.9)$$

Ordenando el sistema obtenemos

$$\begin{cases} -5\lambda - 10\mu = -2 \\ \lambda + 2\mu = 2 \\ -\lambda - 2\mu = -5 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss obtenemos un sistema equivalente a este:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -5\lambda - 10\mu = -2 \\ 0\mu = -5 \end{cases}$$

Este es un sistema incompatible debido a la inconsistencia de la última ecuación. El conjunto solución es vacío. Por lo tanto las rectas r y s no se cortan. En este caso las rectas pueden ser paralelas distintas o alabeadas. Un análisis de los vectores generadores de las rectas determina que estas son paralelas distintas.

2. Debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = \mu \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Ordenando el sistema y aplicando el método Gauss y obtenemos que el sistema es incompatible. El conjunto solución es vacío. Por lo tanto las rectas r y s no se cortan. En este caso las rectas pueden ser paralelas distintas o alabeadas. Un análisis de los vectores generadores de las rectas determina que estas son alabeadas.

3. Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} -2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = 2\mu \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

ordenando el sistema tenemos

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu = 1 \\ 5\lambda - 2\mu = -3 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Aplicamos el método Gauss y obtenemos el conjunto solución

$$\{(\lambda, \mu) / \lambda = 5 \wedge \mu = 14\}$$

Por lo tanto el sistema compatible, las rectas se cortan. El punto de corte se obtiene haciendo $\lambda = 5$ en las ecuaciones de r (o $\mu = 14$ en las ecuaciones de s)

$$\begin{cases} x = -2 - 3 \cdot 5 = -17 \\ y = 3 + 5 \cdot 5 = 28 \\ z = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto las rectas se cortan en $(-17, 28, 5)$. □

Otras aplicaciones

Ejemplo 8.11 *Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido nítrico, HNO_3 . Un recipiente contiene una solución concentrada de HNO_3 al 10%, el segundo tiene HNO_3 al 20% y el tercero HNO_3 al 40%. ¿Cuántos litros de cada recipiente hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 25% de HNO_3 ?*

Solución.

Sea x, y, z el número de litros de las concentraciones de 10, 20 y 40% de HNO_3 , respectivamente. Queremos 100 litros en total, y que la concentración de HNO_3 sea al 25% en 100 litros. Así tenemos

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0.10x + 0.20y + 0.40z = 0.25(100) \end{cases} \quad (8.10)$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas donde cada ecuación representa geoméricamente un plano y podemos observar que son planos no paralelos, por lo tanto la solución será una recta.

La matriz aumentada asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.10 & 0.20 & 0.40 & 25 \end{array} \right)$$

Realizando operaciones elementales

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.10 & 0.20 & 0.40 & 25 \end{array} \right) &\xrightarrow{-0.10F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0.10 & 0.30 & 15 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{10F_2 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 150 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El sistema asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y + 3z = 150 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones dadas por

$$\begin{cases} x = 2a - 50 \\ y = -3a + 150 \\ z = a \end{cases} \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \quad (8.11)$$

Por las condiciones del problema necesitamos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, reemplazando en el sistema (8.11) obtenemos que $20 \leq a \leq 50$. Por lo tanto el conjunto solución para el problema son los puntos del segmento de recta dado por:

$$\begin{cases} x = 2a - 50 \\ y = -3a + 150 \\ z = a \end{cases} \quad \text{con } 25 \leq a \leq 50$$

□

Ejemplo 8.12 *Un comerciante desea mezclar dos calidades de maníes que cuestan \$30 y \$40 por kg respectivamente, con otra nueces de la india que cuesta \$80 por kg. con el objeto de tener 140kg de mezcla que cueste \$60 por kg. Si además desea que en la cantidad de mezcla, la de menor valor sea el doble que la de mayor valor. ¿Cuántos kg de cada variedad tiene que mezclar?*

Solución.

Sean

 $x =$ kg. de maníes de 30\$ por kg $y =$ kg. de maníes de 40\$ por kg $z =$ kg. de nueces de la india de 80\$ por kg

y tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 140 & \text{Ecuación de peso} \\ 30x + 40y + 80z = 60(140) & \text{Ecuación de valor} \\ x = 2y & \text{Restricción} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema la solución es $(x, y, z) = (40, 20, 80)$. Es decir se debe mezclar 40kg de maníes de \$30, con 20kg de maníes de \$40 y 80kg de nueces de la india. \square

Ejemplo 8.13 *Un fabricante de equipos eléctricos tiene la siguiente información acerca de la utilidad semanal por la producción y venta de un tipo de motor eléctrico:*

Nivel x de producción	25	50	100
Utilidad $p(x)$ en dolares	5250	7500	4500

1. Determinar a , b y c de modo que la gráfica de $p(x) = ax^2 + bx + c$, se ajuste a esta información.
2. Según la función cuadrática p , obtenida en 1. ¿Cuántos motores debe producir por semana a fin de obtener máxima utilidad? ¿cuál es la máxima utilidad por semana?

Solución.

1. Reemplazando los puntos de la tabla en p , tenemos

$$\begin{cases} 5250 = 625a + 25b + c \\ 7500 = 2500a + 50b + c \\ 4500 = 10000a + 100b + c \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado y la solución es $(a, b, c) = (-2, 240, 500)$, luego $p(x) = -2x^2 + 240x + 500$.

2. Como $a = -2 < 0$, la ecuación de p es un parábola con ramas hacia abajo, por lo tanto el máximo lo alcanza en el vértice, para determinar este valor, derivamos $p(x)$ e igualamos a cero:

$$p'(x) = -4x + 240 = 0 \Rightarrow x = \frac{-240}{-4} = 60$$

Así el fabricante para obtener la máxima utilidad debe producir y vender 60 motores. La utilidad por semana sera:

$$p(60) = -2(60)^2 + 240(60) + 500 = \$7700$$

 \square

8.3. Ejercicios

1. Indicar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales

a) $2x + 3 = 0$ b) $-2x^2 + x - 2 = 0$

c) $2x + 3y = -z$ d) $\sqrt{3}x + 2 = 5$

c) $2x - 3i = 3$ d) $\sqrt{x} + 2x - 2 = 0$

2. En los problemas siguientes, verificar si los valores dados para las variables son solución de las ecuaciones indicadas.

a) $2x + 3 = 0$ b) $x^2 + 1 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ $x = -i$

c) $-2x^2 + x - 2 = 0$ d) $\sqrt{x} + 2x - 2 = 0$

$x = \frac{1}{4}$ $x = 0.609$

e) $2x + 3y = -z$ f) $2x + 3y = -z$

$x = y = z = 0$ $x = 0, y = -1, z = 3$

3. Demostrar que si (x_0, y_0, z_0) es solución de las ecuaciones $ax + by + cz = d$ y $a'x + b'y + c'z = d'$, entonces es también solución de las siguientes ecuaciones:

a) La que se obtiene al sumar las dos dadas.

b) La que se obtiene al multiplicar la primera por una constante real k .

c) La que se obtiene al multiplicar la primera por una constante y sumarla a la segunda.

4. En los problemas siguientes, verificar si los valores dados para las variables son solución de los sistemas de ecuaciones indicadas.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 - y = 5 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases}$

$x = 2, y = -1$ $x = -i, y = -7$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 3y = 8 \\ y = -x \end{cases}$

$x = -\frac{3}{2}, y = 1$ $x = 1, y = -1$

e) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 5x + 3y = 8 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y = -z \\ 5x + 3y = -3 \\ x + y = 10 + 3z \end{cases}$

$x = y = z = 0$ $x = 0, y = -1, z = 3$

5. Determinar, mediante razonamientos lógicos y ejemplos, cuáles de las siguientes sustituciones dan un sistema equivalente al original:

- a) Sustituir dos o más ecuaciones por su suma.
- b) Sustituir una ecuación por el resultado de multiplicarla por una constante.
- c) Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de sumarla con otra.
- d) Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de restarle otra.
- e) Sustituir una ecuación por la suma de otras.

6. Verificar que los siguientes sistemas son equivalentes

$$a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 - 10x_3 = -5 \\ 4x_3 = 8 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

7. Resolver cada uno de los siguientes sistemas lineales. Si el sistema no tiene solución señalar que es incompatible y si el sistema tiene solución Interpretar geoméricamente las ecuaciones del sistema y la solución.

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - (0.5)y = 5 \\ -2x - y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2y = 3 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 3y = 8 \\ y = -x \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \quad h) \begin{cases} -x - \frac{1}{3}y - 3z = 1 \\ 3x + y - 9z = 5 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

8. Clasificar y resolver los siguientes sistemas.

$$a) \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 5x + 3y = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - \frac{1}{2}y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 5x + 3y = 8 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y + z - w = 0 \\ 2x + 3y + z + 2w = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}$$

9. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- En un sistema compatible indeterminado se puede eliminar una ecuación y obtener un sistema equivalente.
- Un sistema compatible indeterminado es equivalente a un sistema homogéneo.
- Todo sistema compatible indeterminado tiene dos ecuaciones iguales.
- De un sistema incompatible podemos extraer otro compatible (no equivalente) eliminando ecuaciones.

10. Dado el sistema

$$\begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

- Resolver y clasificarlo en función del número de soluciones.
- Determinar si es posible, o no, cambiar una ecuación, de modo que el sistema resulte equivalente al dado.
- Determinar si es posible, o no, eliminar una ecuación, de modo que el sistema resulte equivalente al dado.

11. Estudiar si existe algún valor de m , para el cual el sistema sea compatible. Si es así, resolver el sistema para ese valor de m .

$$a) \begin{cases} -x + y + z = m \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m+1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + my - 4z = m \\ x + y - z = 1 \\ -x + y - z = 3 \end{cases}$$

12. Estudiar la compatibilidad del sistema según los valores de los parámetros a y b .

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y = 0 \\ 3x + y + bz = 0 \end{cases}$$

13. Dados los sistemas

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

- a) Resolver e interpretar geoméricamente en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 respectivamente.
 b) Añadir en cada caso, si es posible, una tercera ecuación de modo que el sistema resulte:
 (i) Compatible Determinado (ii) Compatible Indeterminado (iii) Incompatible.
 Interpretar geoméricamente su respuesta.

14. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos e interpretar geoméricamente la solución, si existe y graficar.

- a) $\pi_1: 2x - y + z = 1$ y $\pi_2: 3x - 2y - z = 1$.
 b) $\pi_1: 2x - y + 3z = 1$ y $\pi_2: -4x + 2y - 6z = 5$.
 c) $\pi_1: 2x - y + 3z = 1$ y $\pi_2: 4x - 2y + 6z = 2$.
 d) $\pi_1: x + y = 0$, $\pi_2: x + z = 0$ y $\pi_3: y - z = 0$
 e) $\pi_1: x + y = 0$, $\pi_2: x + z = 0$ y $\pi_3: y + z = 0$.
 f) $\pi_1: 2x + 3y - z = 0$, $\pi_2: x + y - 3z = 0$ y $\pi_3: 5x + 3y = 0$.

15. Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas. Graficar.

- a) $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$ $s: \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 2\mu \\ z = 4\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$
 b) $r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$ $s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$
 c) $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 6 + 3\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$ $s: \begin{cases} x = 3 - \mu \\ y = 1 - \frac{1}{3}\mu \\ z = 1 - \frac{1}{3}\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$

$$d) \quad r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s : \begin{cases} x = -3\mu \\ y = 2 - 3\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

e) r es la recta que contiene a los puntos $P(2, 3, 0)$ y $Q(1, 1, 3)$ y la recta s que pasa por el punto $Q = (1, 1, 3)$ y tiene como vector director $\vec{d} = (1, -1, 2)$.

f) r es la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $Q(1, 1, 3)$ y la recta s que es paralela a la recta

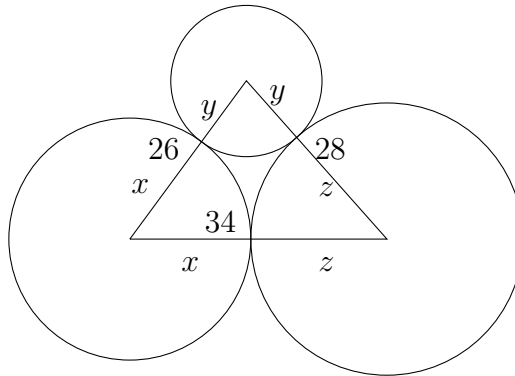
$$t : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

y que contiene al punto $P(1, 3, 2)$.

16. Si la suma de dos números es 81, la diferencia del doble del primero y el triple del segundo es 62. Determinar los dos números.
 17. Si la cantidad de cerca necesaria para encerrar un campo rectangular es de 3000 metros ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre el ancho y el largo es de 50 metros?
 18. Un cliente de un supermercado ha pagado un total de \$1560 por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 litros de aceite cuesta el triple que 1 litros de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.
- Rta. $x = \$10$, $y = \$160$, $z = \$30$
19. Un comerciante vende semillas de trigo, maíz y arroz. Por $3kg$. de trigo, $2kg$ de maíz y $4kg$ de arroz, un cliente paga \$49 por un kilogramo de trigo, 2 de maíz y 3 de arroz. Otro cliente paga \$30, y por $4kg$ de trigo, 3 de maíz y 2 de arroz un tercer cliente paga \$50. ¿Qué precio tiene el kilogramo de cada semilla?
 20. Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de papas, manzanas y naranjas a un precio de 10, 12 y 15 pesos por kg, respectivamente. El importe total de la compra fue de \$116. El peso total de la misma es de 9 kg y, además, compró 1 kg más de naranjas que de manzanas. Determinar la cantidad comprada de cada producto.
 21. Un grupo de clientes compró 8 hamburguesas triples, 6 órdenes de papas fritas y 6 gaseosas por \$261. Un segundo grupo ordenó 10 hamburguesas triples, 6 órdenes de papas fritas y 8 gaseosas y pagó \$316. ¿Existe información suficiente para determinar los precios de cada artículo? En caso contrario, construya una tabla que muestre las diversas posibilidades. Suponga que las hamburguesas cuestan entre \$17,50 y \$22,50, las papas entre \$7,50 y \$10,00 y las gaseosas entre \$6,00 y \$9,00.
 22. Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: el 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas, el 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más del 60% de las de terror al representan la mitad del total de las películas y hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Hallar el número de películas de cada tipo.

Rta. $I = 500$, $O = 600$, $T = 900$

23. Los lados de un triángulo miden 26, 28 y 34 cm. Con centro en cada vértice se dibujan tres de conferencias, tangente entre sí dos a dos, como muestra la figura. Calcular las longitudes de las radios de las circunferencias.



Rta. $x = 16\text{cm}$, $y = 10\text{cm}$ y $z = 18\text{cm}$

24. Un químico cuenta con dos soluciones ácidas, una contiene 15% de ácido, y la otra 6%. ¿Cuántos centímetros cúbicos de cada solución debe usar para obtener 400 cm^3 de una solución con 9% de ácido?.
25. Un laboratorio químico tiene tres recipientes con ácido sulfúrico, H_2SO_4 . Un recipiente contiene una solución concentrada de H_2SO_4 al 15%, el segundo tiene H_2SO_4 al 25% y el tercero H_2SO_4 al 50%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros cuya concentración sea del 40% de H_2SO_4 ? Construya una tabla con alguna de las combinaciones posibles.
26. Si la temperatura de ebullición del agua a una altitud h pies sobre el nivel del mar es t grados Celsius, entonces, $h = a + bt + ct^2$. Sabiendo que el agua hierve a $100^\circ C$ al nivel del mar, a $95^\circ C$ a una altitud de 7400 pies y a $90^\circ C$ a 14550 pies; determine los valores de a , b y c .
27. Una aplicación de las leyes de Kirchoff para circuitos eléctricos determinan los siguientes sistemas

$$a) \begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 16 - 8 - 9I_3 - 3I_1 = 0 \\ 16 - 4 - 9I_3 - 9I_2 = 0 \\ 8 - 4 - 9I_2 + 3I_1 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -4 + 8 - 2I_2 = 0 \\ 8 = 5I_4 + I_1 \\ 4 = 3I_3 + I_1 \\ I_3 + I_4 = I_1 \end{cases}$$

Determinar el valor de las corrientes (I_1, I_2, I_3) y (I_1, I_2, I_3, I_4) respectivamente.

Bibliografía

- Cole, Jeffery y Swokowski, Earl. *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA*. International Thomson.
- Marsden, Jerrold E. y Tromba, Anthony. *CÁLCULO VECTORIAL*. Addison Wesley Longman.
- Singh, Kuldeep. *ENGINEERING MATHEMATICS THROUGH APPLICATIONS*. Palgrave Macmillan
- Sullivan, Michael. *PRECÁLCULO*. Prentice Hall.
- Rojo, Armando. *ÁLGEBRA I*. El Ateneo.
- Ross, Kenneth A. Wright. Charles R.B. *MATEMATICAS DISCRETAS*. Prentice Hall.